وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة البليدة -2- على لونيسي
كلية العلوم الاقتصادية و العلوم التجارية و علوم التسيير

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولي جذع مشترك بعنوان

محاضرات في الاحصاء 2

من إعداد: د محمد بوحجلة

السنة الدراسية 2020/2019

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

إن التطور العلمي الحديث ابرز أهمية استخدام الأساليب الإحصائية في جميع فروع المعرفة لدراسة الظواهر العلمية وتحليل العلاقات المتبادلة فيما بينها على أساس موضوعي،ذلك أن أساليب التحليل الإحصائي هو حجر الأساس في إجراء الدراسات التطبيقية التي تمكن الباحثين والدارسين من الوصول إلى نتائج موضوعية ودقيقة.

و قد جاءت هذه المحاضرات الموجهة لطلبة السنة الأولي ل م د في السداسي الثاني تخصص مسار علوم التسيير حسب ما هو مقرر عليهم من طرف وزارة التعليم العالي و البحث العلمي والتي تقع ضمن المنهاج الموضوع للمقرر حيث تهدف في الأساس إلى مساعدة الطالب على التحكم أكثر في استخدام بعض الأساليب الإحصائية و المؤشرات في تحليل البيانات الخاصة بالظواهر محل الدراسة ، حيث تم تقسيم هذه المطبوعة إلى ثلاثة فصول أساسية.

الفصل الأول تضمن نظرية الاحتمالات حيث شمل على مفاهيم أساسية عن نظرية المجموعات و التحليل التوافقي و التجربة و الحدث (مصطلحات الفراغ الاحتمالي)

أما الفصل الثاني فهو متعلق بالمتغيرات العشوائية حيث تم التطرق إلى المتغيرة العشوائية المنقطعة و مميزاتها العددية و ا المتغيرة العشوائية المستمرة و مميزاتها العددية

أما الفصل الثالث فهو متعلق بقوانين التوزيعات الاحتمالية المنقطعة والمستمرة حيث تم التطرق أولا إلى قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرة العشوائية المنقطعة تم التطرق ثانيا إلى قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات العشوائية المستمرة

و قد اتبع كل فصل بمجموعة من الأمثلة و التمارين المحلولة بالإضافة إلى تمارين مقترحة للإجابة عليها من طرف الطلبة ، وفي نهاية المطبوعة تم وضع الجداول الإحصائية الضرورية والمتعلقة بفصول المطبوعة

نرجو من الله أن ينفع بها و أن يأجرنا عليها ونرحب بكل التصحيحات و الاقتراحات و الملاحظات لإثراء هذا العمل أكثر

الفصل الأول نظرية الاحتمالات

أولا مفاهيم أساسية عن نظرية المجموعات

- أ - مفهوم المجموعة
- ب أنواع المجموعات
- ج - العمليات على المجموعات

ثانيا - التحليل التوافقي

- أ - التبديلة
- ب - الترتيبة
- ج - التوفيقة

ثالثا التجربة و الحدث (مصطلحات الفراغ الاحتمالي)

- أ – التجربة العشوائية
- ب - طرق حسب الاحتمالات

الفصل الأول :نظرية الاحتمالات

تمهيد:

يعالج هذا الفصل بعض المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات و التي تعتبر ضرورية كمدخل لنظرية الاحتمالات [1] حيث من الضروري التعرف في هذا الفصل على بعض القوانين الخاصة بالمجموعات و التي يتم استخدامها بشكل واسع في حساب الاحتمالات

أولا مفاهيم أساسية عن نظرية المجموعات:

أ- **مفهوم المجموعة** : يستخدم الإنسان العادي مفهوم المجموعات في حياته اليومية بشكل كبير وان كان لا يقصد ذلك المفهوم الرياضي مثل أن يستعمله مجموعة السيارات أو مجموعة الطلبة أو مجموعة الكتب ....الخ ، فهو يتكلم على شئ مكون من عدة وحدات او عناصر

1 – **تعريف المجموعة** :

التعريف الأول : هي اجتماع لعدد من الأشياء المتباينة و المشتركة مع بعضها البعض قي صفة واحة او عدة صفات بحيث يمكننا من خلال تلك الصفة او الصفات تحديد انتماء عنصر ما إلي تلك المجموعة أو عدم انتمائه [2]

التعريف الثاني : تسمى أي قائمة أو تجمع من الأشياء (بشرط أن تكون القائمة معرفة تعرفا جيدا) مجموعة ، وتسمى الأشياء المكونة لهذه المجموعة عناصرها [3]

ويرمز للمجموعة عادة بالحروف الكبيرة مثل A , B , C أو Ω و لعناصرها المكونة لها بحروف صغيرة x ، a , b , c ونكتب : إذا كان x عنصرا من المجموعة A بالشكل $X \in A$ و تقرأ

X ينتمي إلي A أو $X \notin A$ وتقرأ X لا ينتمي إلي A

1- سيمور ليشتز – الاحتمالات - سلسلة ملخصات شوم – الدار الدولية للاستثمارات الثقافية – الطبعة 4 – 2000- القاهرة مصر ص 1

2 - السعدي رجال – نظرية الاحتمالات – ديوان المطبوعات الجامعية - 2008- الطبعة 3 – الجزائر –ج 1- ص 2

3- سيمور ليشتز – الاحتمالات- مرجع سابق – ص 1

2- **طرق كتابة المجموعة**: يتم كتابة وتعين المجموعات بعدة طرق و نحن سنقتصر على طريقتين هما [1]

- **طريقة القائمة** : ويتم فيها ذكر جميع عناصر المجموعة وكتابتها بين معترضتين ، وهذه الطريقة تخص عادة المجموعات القابلة للعد

  مثال : لتكن المجموعة A هي عبارة عن مجموعة الأعداد الفردية الأقل أو تساوي 10

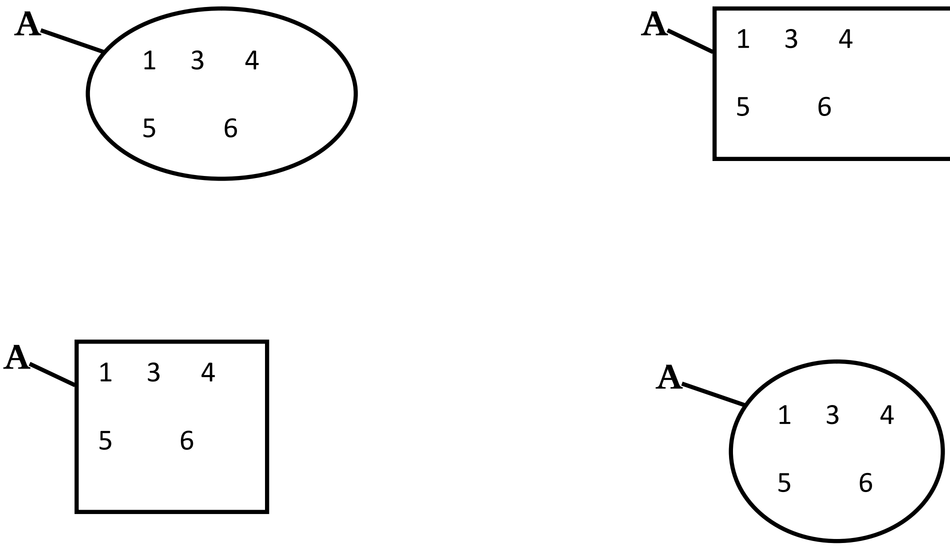
  $A = \{1,3,5,7,9\}$

- طريقة القاعدة : و تعتمد على ذكر الخاصية (او الخواص) التي تميز عناصر المجموعة

مثال : $A = \{x/x \text{ ,عدد فردي} , x \leq 15\}$ و تقرأ المجموعة A هي المجموعة التي تحتوي على العناصر X بحيث X عدد فردي واقل أو يساوي 10

3– تمثيل المجموعة : تمثل المجموعة بيانيا باستخدام مخطط أولر فن (او فن) ، باعتماد أشكال هندسية مختلفة كالدائرة أو المستطيل أو بخط مغلق[2]، حسب الأشكال التالية

$A = \{1,3,4,5,6\}$



---

[1] - السعدي رجال – نظرية الاحتمالات- مرجع سابق – ص 6

[2] - السعدي رجال – نظرية الاحتمالات- مرجع سابق – ص 5

ب أنواع المجموعات : ونجد الأنواع التالية [1]

1- **المجموعة المنتهية** : نقول عن المجموعة A أنها منتهية إذا كانت فارغة (خالية) أو تحتوي على عدد محدود من العناصر (أي بها n عنصر) وهذا العدد n يسمي أصلي المجموعة ونكتب $card\ A= n$

مثال : إذا كان $A = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$ فان $card\ A= 8$

و إذا كان $B = ¤$ فان $card\ B= 0$

2- **المجموعة غير منتهية** : نقول عن المجموعة A أنها غير منتهية إذا احتوت على عدد غير منتهى من العناصر المختلفة عن بعضها البعض مثنى مثنى

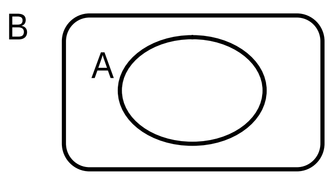
مثال : مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots \dots \infty\}$

مجموعة الأعداد الحقيقية $\Re = \{-\infty, \dots \dots ,0, \dots \dots , +\infty\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة $Z = \{-\infty, \dots - 2, -1,\ 0\ ,1\ , 2\ , \dots \dots , +\infty\}$

3- **المجموعة الجزئية** : نقول عن المجموعة A أنها مجموعة جزئية من المجموعة B اذا كان كل عنصر من A ينتمي إلي المجموعة B ، في هذه الحالة نقول ان المجموعة A محتواة في المجموعة B ، ونكتب $(x \quad \Rightarrow x \quad) \Leftrightarrow (A \subset B)$

وتمثيلها حسب مخطط فن



ونقول أن B غير محتواة في A ونكتب $(B \not\subset A)$

ملاحظة: كل مجموعة محتواة في نفسها، $(A \subset A)$

وإذا كان لدينا $(A \subset B\ \ \wedge B \subset C\ \ \Rightarrow A \subset C)$

1- نفس المرجع –صص 7-9 بتصرف

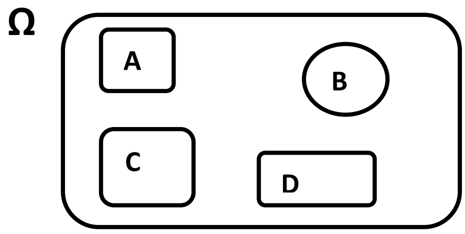
4- **تساوي مجموعتين** : نقول عن المجموعتين A وB أنهما متساويتين إذا كان لهما نفس العناصر أي أن المجموعة $A \subset B$ و $B \subset A$ ونكتب $(A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B)$

مثال : إذا كان لدينا المجموعة A هي حلول المعادلة $x^2 = 4$ و المجموعة $B = \{-2, \ 2\}$ ، فهل هما متساويتين

لدينا حلول المعادلة $x^2 = 4$ هي $x = 2$ أو $x = -2$ اي $A = \{-2, \ 2\}$

ومنه $(A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B)$

5- **المجموعة الكلية** : إذا كانت المجموعة Ω تحتوي كل المجموعات الجزئية نسمي المجموعة Ω بالمجموعة الكلية أو الفضاء



6- **المجموعة الخالية** : هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر و نرمز لها بالرمز ϕ ، وهي محتواة في اي مجموعة $(\phi \subset A)$ و $(\phi \subset \Omega)$

7- **مجموعة أجزاء المجموعة أو تجزئة المجموعة** : لتكن E مجموعة ما ، إن المجموعات المؤلفة من كل المجموعات الجزئية ل E تسمى تجزئة المجموعة E و يرمز لها بالرمز $P(E)$ ، ونكتب $P(E) = \{x/\{x\} \subset E\}$ ، وهي عبارة عن المجموعة التي عناصرها عبارة عن مجموعات .

و لتحديد عدد هذه المجموعات الجزئية المكونة لتجزئة هذه المجموعة نستخدم العلاقة التالية 2^n حيث n عدد عناصر المجموعة أي $P(E) = 2^n$ ci

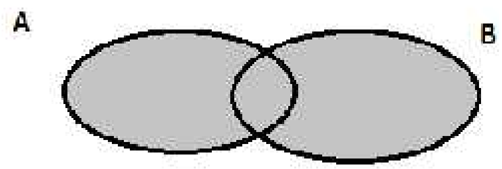
مثال : إذا كانت $E = \{0 ,2 ,3\}$ فان $P(E) = 2^n = 8$ ci

$$P(E) = \{\{0\} ,\{2\} ,\{3\} ,\{0 ,2\} ,\{0 ,3\} ,\{2 ,3\} ,\{0 ,2 ,3\} ,\phi\}$$

ونلاحظ أن $(\phi \subset P(E))$ و $(E \subset P(E))$

ج- **العمليات على المجموعات** : ونجد العمليات التالية [1]

1- **الاتحاد** : نفرض ان A و B مجموعتين اختياريتين ، يعرف اتحاد A و B ويرمز له بالرمز $(A \cup B)$ بانه مجموعة العناصر التي تنتمي الي A أو B أو كلاهما معا، ونكتب $A \cup B = \{x : x \in A$ او $x \in B\}$



$(A \cup B)$

خواص الاتحاد :

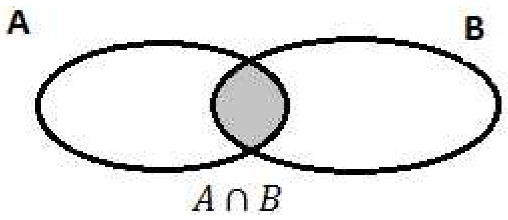
- $A \subset A \cup B \quad ; \quad B \subset A \cup B$
- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \subset \Omega$ و $B \subset \Omega$ فان $B \cup \Omega = \Omega$ و $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cup B = B \cup A$ عملية الاتحاد تبديلي
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ خاصية التجميع

2- **التقاطع** :يعرف تقاطع A و B ويرمز له بالرمز $(A \cap B)$ بانه مجموعة العناصر المشتركة او هي مجموعة العناصر التي تنتمي الي كل من A و B في نفس الوقت ، ونكتب

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ و } x \in B\}$$

---

[1] - مور سبيغل - الإحصاء و الاحتمالات – ملخصات شوم – اكاديميا انترناشيونال – بيروت لبنان – 2001- ص 12



خواص التقاطع :

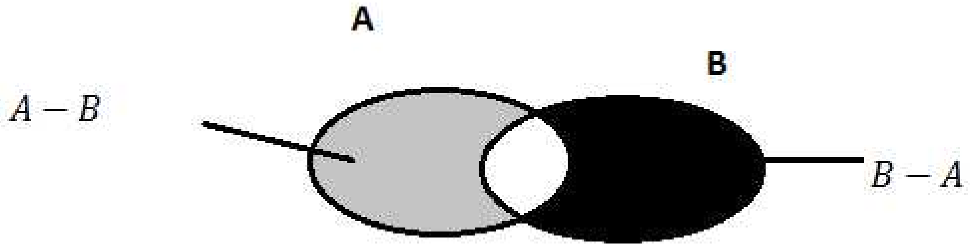
- اذا كان لدينا $(A \cap B) = \emptyset$ نقول ان A و B مجموعتين متنافيتين (منفصلتين) ، لا توجد عناصر مشتركة
- اذا كان لدينا $(A \cap B) \neq \emptyset$ نقول ان A و B مجموعتين غير متنافيتين ، أي توجد عناصر مشتركة
- $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$
- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \phi$
- $B \subset \Omega$ و $A \subset \Omega$ فان $B \cap \Omega = B$ و $A \cap \Omega = A$
- $A \cap B = B \cap A$ عملية التقاطع تبديلي
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ خاصية التجميع

ملاحظة :

- عملية التقاطع توزعية بالنسبة للاتحاد $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- عملية الاتحاد توزعية بالنسبة للاتحاد $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3- **الفرق** : تسمى مجموعة العناصر التي تنتمي الى A ولا تنتمي إلي B في حالة التقاطع بين المجموعتين A **و** B بفرق A **و** B ونرمز لها بالرمز A-B (أي A ناقص B) أو A/ B ، أي هي العناصر التي تنتمي إلي المجموعة A و لا تنتمي إلي المجموعة B

$$A - B = \{x / x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$



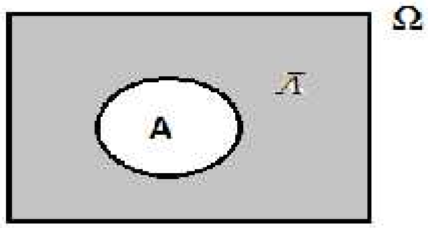
من الشكل نلاحظ أن $A-B \neq B-A$

مثال : إذا كان $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{3,4,5,6\}$

فان $B-A=\{5,6\}$ و $A-B=\{1\ 2\}$

4- **المتمم** : إذا كان لدينا المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة الكلية Ω فان متمم A بالنسبة إلي Ω هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلي Ω و لا تنتمي إلي A و يرمز له بالرمز $\bar{A}$ أو الرمز C_A ،

ونكتب $\bar{A}=\{x/x \in \Omega \wedge x \notin A \subset \Omega\}$ اي ان $\bar{A}=\Omega-A$



خواصه :

- $A \cup \bar{A}=\Omega$
- $A \cap \bar{A}=\phi$
- $\bar{\Omega}=\phi$
- $\bar{\phi}=\Omega$
- $\bar{\bar{A}}=A$
- $A-B=A \cap \bar{B}$
- $A=(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$
- $B=(B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$

- خاصية دي مرجان :

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

مثال : لتكن لدينا المجموعات التالية $\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8\}$ و $A=\{2,3,4\}$

$B=\{4,5,6\}$ ، فاوجد الحوادث (المجموعات) التالية $\boldsymbol{A\cup B}$ ،

$\boldsymbol{A\cap B}$ ، $\boldsymbol{A-B}$ ، $\boldsymbol{B-A}$ ، $\bar{\boldsymbol{B}}$ ، $\bar{\boldsymbol{A}}$ ، $\overline{\boldsymbol{A\cap B}}$ ، $\overline{\boldsymbol{A\cup B}}$

الحل : $\boldsymbol{A\cup B}=\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6}\}$ ، $\boldsymbol{A\cap B}=\{\mathbf{4}\}$

$\boldsymbol{B-A}=\{\mathbf{5},\mathbf{6}\}$ ، $\boldsymbol{A-B}=\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$

$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{\Omega}-\mathbf{B}=\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{7},\mathbf{8}\}$ ، $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A}=\{5,6,7,8\}$

$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}=\{2,3,5,6,7,8\}$

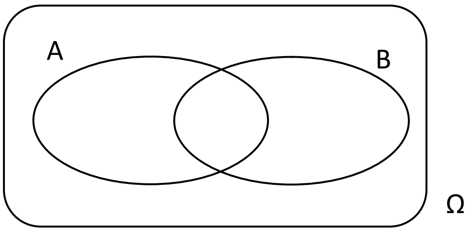
$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}=\{7,8\}$

تمارين مقترحة

التمرين الأول: لدينا فضاء العينة Ω متعلق بتجربة عشوائية ونعرف الحدثين A و B :

وضح في الشكل المقابل الحوادث التالية

$A \cap B$ ، $\overline{A} \cap B$ ، $A \cap \overline{B}$ ، $\overline{A} \cap \overline{B}$ ، $A - B$



التمرين الثاني: ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ، عرف التجربة العشوائية في هذه التجربة ؟

- اوجد فراغ الحوادث الأولية (فضاء العينة) وما هو عدد عناصره ؟
- إذا عرفنا الحوادث التالية
- A ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل
- B ظهور صورتين و رقم
- C ظهور رقمين على الأكثر
- D ظهور الرقم في الرميات الثلاث
- فحدد الحوادث المتنافية و غير متنافية ؟

التمرين الثالث: لتكن لدينا المجموعات التالية : Ω={ 2. 4. 6 .8 .10 .12 .14 .16 .18 .20 }

A= {2. 6 .10 .14 .18 } ، B= {4.6 .8 .12 .14 .16} ، C={2. 6. 10}

- اوجد الحوادث التالية : $A \square B$ ، $\overline{C}$ ، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$

$\overline{A \cap C}$ ، $\overline{B \square C}$ ، $\overline{A \cap B}$ ، $C \cap B$ ، $B - A$ ، $A - B$ ، $A \cap B$

التمرين الرابع : نقوم برمي حجر النرد مرة واحدة ، ونعرف الحوادث التالية :

- A الحصول على عدد زوجي
- B الحصول على عدد اقل تماما من 5
- D الحصول على عدد فردي
- اوجد ما يلي : $A \square B$ ، $\overline{D}$ ، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ ، $B - D$ ، $D \cap B$

$\overline{A} \square \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \square B}$

التمرين الخامس : ليكن لدينا فضاء العينة (Ω) ، ولنعرف الحوادث ; A ، B ، C من Ω عبر عن الحوادث التالية:

1- حدوث A فقط
2- وقوع حادث على الأقل
3- لا يقع أي حادث
4- حدوث A على الأكثر

ثانيا – التحليل التوافقي :

من بين المفاهيم الأساسية التي لها علاقة وطيدة بالاحتمالات بعد المجموعات نجد التحليل التوافقي أو ما يعرف بطرق العد ، فهو يهدف إلي تحديد عدد النتائج الكلية الممكنة لتجربة معينة (فضاء العينة) و عدد عناصر الحادثة دون الحاجة إلي كتابة كل النتائج الكلية للتجربة ، ويكون ذالك خاصة في حالة التجارب التي تكون نتائجها كبيرة ومن المستحيل و الصعب عدها مباشرة أو كتابتها ، فبواسطة طرق العدد نستطيع معرفة عدد النتائج الكلية [1]

I. قاعدة الجمع :

إذا كان لدينا عمليتين متنافيتين A و B بحيث ان العملية A تتم بعدد من الطرق قدره n و العملية B تتم بعدد من الطرق قدره m فان عدد الطرق لإتمام العمليتين A أو B هو (n+m)

مثال : طالب جزائري حصل على شهادة البكالوريا يريد ان يلتحق بجامعة الجزائر او جامعة البليدة وكان مقبولا في جامعة الجزائر في 4 كليات و في جامعة البليدة في 5 كليات ، فان عدد الطرق الكلية لقبول هذا الطالب في إحدى الكليات معا هي 9= 5+4

II. قاعدة الضرب:

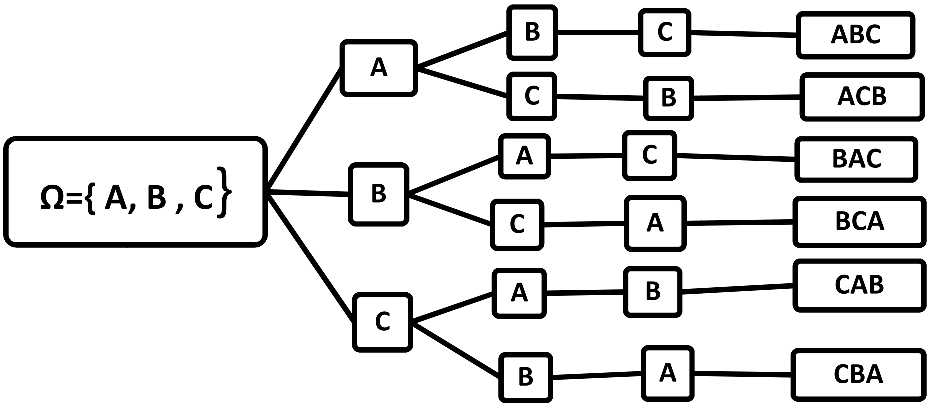
إذا كان لدينا تجربة عشوائية ما تشمل على عدة مراحل عددها K مرحلة وكان لكل مرحلة عدد من النتائج الممكنة لها مثلا المرحلة الأولي لها n_1 نتيجة ممكنة و المرحلة الثانية لها n_2 نتيجة ممكنة و هكذا ، فان العدد الكلي للنتائج الممكنة لهذه التجربة يساوي

$$N= n_1 . n_2 .n_3 . \dots\dots\dots .n_K$$

مثال1: ما هي عدد الطرق الممكنة في ترتيب حرف المجموعة التالية $\Omega = \{A , B, C\}$

باستعمال الشجرة نجد

1- حسن ياسين طعمة و ايمان حسين حنوش - الإحصاء الاستدلالي - دار صفاء للنشر و التوزيع – الطبعة الثانية 2015- عمان الأردن –ص 13- بتصرف

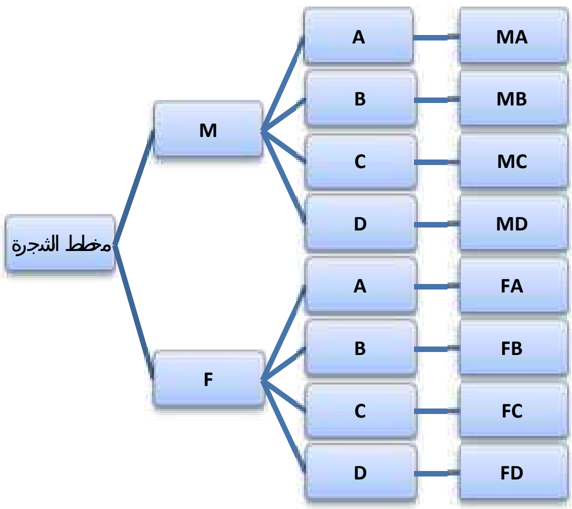


عدد الطرق هي : $N= 3 . 2 . 1 = 6$

نلاحظ أن الترتيب مهم و كل عنصر يستعمل مرة واحدة في كل عملية

مثال 2 : نود تصنيف مجتمع ما وفق الجنس (ذكر M ، أنثي F) و الحالة العائلية (متزوج A ، أعزب B، مطلق C ، أرملD) فعدد الأصناف المختلفة يكون $n_1 * n_2 = 2*4 = 8$

فبتالي مخطط الشجرة يكون



ملاحظة : يعرف مضروب أي عدد صحيح موجب ، بأنه حاصل ضرب الرقم 1 في الرقم 2 في الرقم 3 حتى نصل إلي العدد نفسه [1] n ، ويرمز له بالرمز ! n ، و يقرأ n عاملي

و نكتب $n! = n\ .(n-1).(n-2).(n-3)\ldots\ldots\ldots 3\ .2\ .1$

خواص : $0! = 1$ و $1! = 1$

مثال : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

أ– **التبديلة (التبديل) :**

لتكن لدينا مجموعة ما مكونة من عناصر عددها n وكلها مختلفة عن بعضها البعض ، فنسمي وضع هذه العناصر و ترتيبها في وضع معين بأنه تبديلة لهذه العناصر بشرط أن تؤخذ جميع العناصر بعين الاعتبار عند الترتيب [2] و يرمز لها بالرمز P

أي بتغير ترتيب عناصر كل المجموعة لكي يعطينا تبديلا جديدا

مثال : ما هي عدد الحالات الممكنة لترتيب كل عناصر المجموعة التالية $\Omega = \{A\ , B, C\}$ ، اي عدد التبديلات التي يمكن الحصول عليها

(ABC) , (ACB) , (BAC) , (BCA) , (CAB) , (CBA)

نلاحظ ان **الترتيب مهم في التبديلة ونستعمل عناصر كل** المجموعة و كل عنصر يستعمل مرة واحدة ، وبشكل عام عدد التبديلات ل n عنصر تعطي بالعلاقة التالية

$$P_n = n! = n\ .(n-1).(n-2).(n-3)\ldots\ldots\ldots 3\ .2\ .1$$

---

[1] - حسن ياسين طعمة و ايمان حسين حنوش - اساليب الاحصاء التطبيقي - دار صفاء للنشر و التوزع – الطبعة الاولي 2009- عمان الاردن –ص 19

[2] - سيمور ليشتز – الاحتمالات - سلاسلة ملخصات شوم –ص 23

ولدينا الحالات التالية

1- **حالة التبديلة بدون تكرار العناصر** : أي عدم وجود تكرار للعناصر في المجموعة و تعطي بالعلاقة التالية $P_n = n!$

مثال : ما هي عدد الطرق لترتيب 10 أطفال في شكل خط مستقيم ،

$P_1 = 10! = 3628800$

ما هي عدد الإشارات التي يمكن تشكيلها من أربعة أعلام ألوانها ، اخضر واحمر و ابيض و اصفر

$P_4 = 4! = 24$ ،

إذا نلاحظ أن الترتيب مهم و العناصر لا تتكرر في المجموعة و التكرار غير مسموح به في عملية تكوين التبديلات

2- **حالة التبديلة مع وجود تكرارات في العناصر** : (بعض عناصر المجموعة تتكرر)

أي إذا كان لدينا مجموعة أشياء عددها عناصرها n حيث بعض العناصر تتكرر أي هي من نفس النوع (n_1 من النوع الأول ، n_2 من النوع الثاني ، n_3 من النوع الثالث ، ...الخ) و نريد ترتيبها فتعطى بالعلاقة التالية $P_n^{n_1 n_2 n_3 \dots n_K} = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \, n_3! \dots\dots n_K!}$

مثال : ما هو عدد التبديلات المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع أحرف كلمة RECHERCHE ، لدينا عدد الحروف 9 ، حيث موزعة كما يلي

R=2 , E = 3 , C= 2 , H = 2

إذا عدد التبديلات هو $P_9^{2.2.2.3} = \frac{9!}{2! \, 2! \, 2! \, 3!} = 7560$

3- **حالة التبديلة الدائرية** :

في بعض الأحيان نلجأ إلي تبديل أو ترتيب عناصر مجموعة من الأشياء في وضعية دائرية مثل طاولة [1]، فان عدد الطرق الممكنة لذلك تعطي بالعلاقة التالية

$$P_n = (n-1)! = (n-1).(n-2).(n-3)\ldots\ldots\ldots 3.2.1$$

أي أننا نقوم بتثبيت العنصر الأول ثم نرتب بقية العناصر حوله و بالنسبة له

مثال : بكم طريقة يمكن ل 5 إخوة ان يجلسوا حول طاولة مستديرة لتناول وجبة العشاء

$$P_5 = (5-1)! = 4! = 24$$

4- **حالة إذا كان التكرار مسموحا به** : و نستخدم هذه في حالة السحب مع الإرجاع مثلا و تعطي بالعلاقة التالية $P_n = (n)^n$

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث كرات من كيس به ثلاث كرات ذات ألوان مختلفة حيث يتم السحب علي التوالي ويتم إعادة سحب الكرة المسحوبة قبل سحب الثانية

$$P_3 = (3)^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

ب- الترتيبة :

لنفرض انه يراد سحب مجموعة جزئية مؤلفة من k عنصرا مأخوذة (مسحوبة) من مجموعة كلية عدد عناصرها n عنصرا حيث $k < n$ ، نسمي هذا الترتيب ب الترتيبة و رمزه A و يكون الترتيب في هذه الحالة مهم ، ولدينا حالتين

1- الترتيبة بدون إرجاع : إن السحب بدون إرجاع أي سحب العنصر من المجموعة الكلية مرة واحدة فقط للحصول على المجموعة الجزئية ثم نرتب عناصر هذه المجموعة الجزئية يعطي بالعلاقة التالية $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار 3 أحرف من بين الأحرف التالية $\Omega = \{a, b\ c, d\ f\}$ و ترتيبها

---

[1] - محمد يوسف أشقر وو عبد الالطيف يوسف الصديقي – أساسيات الإحصاء و الاحتمالات – دار الراتب الجامعية – الطبعة الأولي بيروت – ص 81

لدينا $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

ملاحظة : إذا كان n=k يصبح لدينا $A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ (حالة تبديلة)

2- الترتيبة بالإرجاع : في حالة وجود تكرار ، وإذا كان التكرار مسموحا به فان ترتيب k عنصرا المأخوذة (مع الإرجاع) من n عنصرا هي $\mathfrak{N}_n^k = (n)^k$

و ذلك مع إمكانية تكرار العنصر نفسه عدة مرات الي غاية k مرة و يرمز لها بالرمز $\mathfrak{N}_n^k$

مثال 1: ما هو عدد الأرقام التي يمكن تكوينها للشبكة الهاتفية اذا كان رقم الهاتف مكون من 6 أرقام

لدينا $\Omega=\{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 \}$ ، شكل رقم الهاتف يكون

00 00 00 ، 01 00 00 ، 02 00 00 ، ....

إذا $\mathfrak{N}_1^6 = 10^6 = 1000000$

مثال 2 : ما هو عدد الكلمات التي يمكن تكوينها ب 4 أحرف في حالة السماح بتكرار الأحرف من الأحرف التالية $\Omega = \{a , b , c , d, f , g , s\}$ ، $\mathfrak{N}_6^4 = 6^4 = 1296$

ج- التوفيقة :

التوفيقة هي عبارة عن عدد الطرق الممكنة التي يمكن بها اختيار k عنصر من بين n عنصر دون مراعاة أو دون الأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر ، أي أن **الترتيب غير مهم**

و نرمز لها بالرمز C_n^k و تعطى بالعلاقة التالية $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

و هذا في حالة عدم وجود تكرارات

مثال 1 : كم لجنة يمكن تكوينها ب 4 أشخاص مأخوذة من بين 8 أشخاص

نلاحظ أن الترتيب غير مهم

$$C_n^k = C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$$

مثال 2 : ما هو عدد الكلمات التي يمكن تكوينها ب 3 حروف مأخوذة من بين 5 أحرف مع عدم السماح بتكرار الحروف $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

ملاحظة : في حالة السماح بإعادة تكرار العنصر أو يكون السحب مع الإرجاع فان التوفيقة تعطي في هذه الحالة بالعلاقة التالية $C_{(n+k-1)}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

مثال : ما هو عدد العينات أو المجموعات التي يمكن تكوينها من ثلاثة طلبة و التي يكون فيها السحب مع الإعادة من مجموعة تحتوي علي 6 طلبة

$$C_{6+3-1}^3 = \frac{(6+3-1)!}{3!(6-1)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

خواص :

- $C_n^0 = 1$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

تمارين مقترحة

التمرين الأول:

- أوجد عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من جميع حروف كل من الكلمات التالية: *Statistique, Finance, Comptabilité*
- -ما هو عدد الطرق لترتيب 11 كتاب على رف اذا كان منها 5 كتب للإحصاء ، و 3 كتب للرياضيات ، و 3 للمحاسبة
- كم طريقة يمكن اختيار عملتين من بين ست عملات
- لاختيار 6 أسئلة من بين 10
- -كم طريقة يمكن اختيار بعثة علمية تتكون من 3 رجال و سيدتين يتم اختيارهم من بين 7 رجال و 5 نساء
- ما هي عدد الطرق لاختيار 11 لاعب لفريق كرة القدم يتم اختيارهم من بين 25 لاعب

التمرين الثاني: لدينا 07 طلبة، كم طريقة يمكن لهم الجلوس في الحالات التالية:1- في خط مستقيم به 07 مقاعد، 2- في خط مستقيم به 5 مقاعد، 3- حول طاولة مستديرة بها 07 مقاعد،

التمرين الثالث: يتألف المجلس العلمي للجامعة من 15 عضوا، وحتى يجتمع هذا المجلس لا بد من توفر الحد الأدنى من النصاب القانوني، والبالغ عشرة أعضاء.1- كم طريقة يمكن تأمين الحد الأدنى لنصابه القانوني، 2- كم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني.

التمرين الرابع: يراد تشكيل لجنة طبية مكونة من 3 أعضاء يتم اختيارهم من 6 أطباء منهم أخصائيان و 4 طبيبات

- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في الحالات التالية :
- إذا لم يكن هناك أي شرط حول اختيار الأعضاء ؟
- يجب أن تضم اللجنة طبيبا أخصائيا واحد فقط ؟

- يجب أن يكون هناك على الأكثر طبيبة واحدة في اللاجنة ؟
- يجب أن تضم اللجنة طبيبا أخصائيا واحد وطبيبة واحدة ؟

التمرين الخامس: كم عدد يمكن تكوينه ب3 أرقام من الأرقام التالية {1 ، 2 ،3 ، 6 ،7} في حالة عدم التكرار؟

- كم عدد منها يبدأ بالرقم 2
- كم عدد منها زوجي
- كم عدد منها فردي
- كم عدد منها اكبر من 200

ثالثا –التجربة و الحدث (مصطلحات الفراغ الاحتمالي)

أ – التجربة العشوائية :

1- **مفهوم التجربة** :تعد التجربة من أهم المفاهيم في نظرية الاحتمالات و هي تقوم علي أساس التأكد من تحقق وصول بعض الظروف المشتركة لظاهرة ما تحت شروط أو ظروف طبيعية أو من صنع الإنسان ، فالتجربة هي كل عملية تؤدي إلي ملاحظة أو قياس ظاهرة ما

ولدينا نوعان من التجارب

- **التجربة العلمية النظامية** : و هي كل تجربة يمكن ان نتوقع او نحدد نتائجها سلفا علي أساس القوانين العلمية المعروفة انطلاقا من جملة من الشروط المرتبطة بالظاهرة و المتوفرة أثناء التجربة [(1)]

مثل تجربة تحول الماء الي بخار اذا سخن على النار الي درجة حرارة $100م^{0}$ ، في ظروف الضغط الجوي العادي ، أو تجربة رمي كرة نحو الأعلى فإنها سوف تسقط بفعل الجاذبية

- **التجربة العشوائية** : هي كل تجربة يمكن تكرارها أو هي قابلة للتكرار و تكون نتائجها غير محددة سلفا لكونها تعتمد على الصدفة و العشوائية رغم انطلاقنا من نفس جملة شروط التجربة [(2)] ، أو هي كل تجربة يمكن تحديد كل النتائج الكلية الممكنة لها ولكن لا يمكن معرفة مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر ، مثل رمي قطعة نقدية أو فحص فصيلة الدم لشخص ما فإننا نعرف النتائج الكلية لكن لا نعرف النتيجة مسبقا التي ستظهر

2- **فراغ الحوادث الأولية (فضاء العينة)** :

فضاء العينة هي مجموعة النتائج الكلية الممكنة للتجربة اي جميع المشاهدات الممكنة للتجربة و يرمز لها عادة ب Ω و تمثل المجموعة الكلية

مثل رمي قطعة نقدية $\Omega = \{P , F\}$

---

[1]- السعدي رجال – مرجع سابق –ص 117

[2]- نفس المرجع –ص 117

أو رمي حجر النرد $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3- الحدث و أنواعه :

❖ **تعريفه :** هو فئة جزئية من النتائج الممكنة لفراغ التجربة الكلية و يرمز للحادث بحرف من الحروف الكبيرة C, B, A ، وهو مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω [1] ، أي انه هو نتيجة ما من النتائج الممكنة الكلية للتجربة مثل الحصول علي الوجه F عند رمي قطعة نقدية

❖ **أنواع الحوادث :**

- **الحادث البسيط :** و هو الذي يحتوي علي نتيجة واحدة من النتائج الكلية لفراغ العينة اي من Ω وهو مجموعة جزئية من Ω ذو إمكانية واحدة

  مثل الحصول علي الصورة عند رمي قطعة نقدية مرة واحدة

- **الحادث المركب :** و هو الحادث المركب من عدة حوادث بسيطة ، مثل الحصول علي رقم زوجي عند رمي قطعة النرد مرة واحدة
- **الحادث الأكيد :** هو الحادث المكون من كل الحوادث الأولية ل Ω مع العلم أن فراغ الحوادث الأولية يمثل كل النتائج الممكنة اي انه الحادث الذي يقع حتما في التجربة و يرمز له بالرمز Ω

مثال : ليكن A هو الحادث الذي يمثل النتيجة التي تظهر عند رمي زهرة النرد

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، أو عند رمي قطعة نقدية $\Omega = \{P, F\}$

- **الحادث المستحيل :** هو الحادث غير قابل للتحقق أبدا و بالتالي فهو لا يحتوي علي أي حدث أولي من التجربة الكلية Ω ، مثل ظهور الرقم 7 في رمي زهرة النرد ، أو عدم ظهور احد الأوجه عند رمي قطعة نقدية

1- شرف الدين خليل – الإحصاء الوصفي – ص 91

- **الحوادث المتنافية و غير متنافية** : الحوادث المتنافية هي تلك الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد حيث وقوع احدها يمنع وقوع الأخر (حادث مستحيل)

مثال : ليكن الحادث A هو ظهور الوجه و B هو ظهور الرقم عند إلقاء قطعة نقدية مرة واحدة

فان ظهور A يمنع ظهور B

ونقول إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فان A و B حادثين متنافيين أي لا يقعان في نفس الوقت

أما إذا كان $A \cap B \neq \emptyset$ فان A و B حادثين غير متنافيين

- **الحوادث المستقلة** : نقول عن الحادثين A و B أنهما مستقلان إذا كان وقوع احدهما لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحادث الأخر ، فمثلا نتائج عدة رميات متعاقبة لقطعة نقدية تمثل حوادث مستقلة عن بعضها البعض أي كل رمية مستقلة عن الأخرى

أما الحوادث غير مستقلة فهي التي وقوعها يؤثر في وقوع حادث أخرى ، مثل سحب كرات ملونة من كيس حيث إذا سحبنا الكرة في الحادث الأول ثم لم نعد الكرة فان الحادث الثاني أي السحبة الثانية تتأثر بالكرة المسحوبة في الحادث الأول

- **الحادث المتمم (المعاكس)** : نقول انه لكل حادث A من فضاء الحوادث الأولية متمم يتكون من مجموعة الإمكانيات غير محققة ل A و المرتبطة بالفضاء الاحتمالي (فضاء العينة) ويرمز له بالرمز $\bar{A}$ ولدينا $\bar{A} = \Omega - A$

$$P(\bar{A}) = P(\Omega) - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

مثال : في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة اوجد الحوادث التالية و بين نوعيتها

الحادث A : ظهور العدد 3

الحادث B: ظهور عدد اكبر من 6

الحادث C : ظهور عدد فردي

الحادث D: ظهور العدد 2 علي الأقل

الحادث G : ظهور عدد أولي

الحادث F : ظهور عدد زوجي او فردي

الحل : الحادث A : ظهور العدد 3 ومنه { 3}=A حادث بسيط

الحادث B: ظهور عدد اكبر من 6 ومنه Ø ={ }=B حادث مستحيل

الحادث C : ظهور عدد فردي ومنه { 5, 3, 1}=C حادث مركب

الحادث D: ظهور العدد 2 علي الأقل ومنه {6, 5, 4, 3, 2}=D حادث مركب

الحادث G : ظهور عدد أولي ومنه { 5, 3, 2}=G حادث مركب

الحادث F : ظهور عدد زوجي او فردي ومنه { 6, 5, 4, 3, 2, 1}=F حادث أكيد

ب – طرق حساب الاحتمالات :

1- تعريف الاحتمال :

- عرف الاحتمال P للحادث A بأنه إذا كان للحادث A عدد من الطرق التي يمكن أن يقع بها عددها N من بين طرق كلية عددها S بشرط أن تكون لها نفس فرص الوقوع (1)
- الاحتمال هو نسبة عددية غير سالبة محصورة بين الصفر و الواحد
- تعريف لابلاس الرياضي الفرنسي (1749-1827) الاحتمال هو بأنه لظهور الحادث A أثناء تجربة عشوائية ما يكون مساويا إلي النسبة بين عدد أحداث الظاهرة قيد الدراسة إلي العدد الكلي للأحداث الممكنة (2)

و يتراوح قيمة الاحتمال بين الصفر و الواحد الصحيح ، فالحادث المستحيل الوقوع يكون احتمال حدوثه صفر ، و الحادث الأكيد الوقوع يكون احتمال وقوعه يساوي الواحد ، أما الحوادث المحتملة

[1]- سيمور ليشتز – الاحتمالات - سلسلة ملخصات شوم –ص 53

[2]- احمد عامر عامر – الاحصاء 2 – دار الغرب للنشر و التوزيع – دون سنة نشر – الجزائر – ص 35

الوقوع فان احتمالها يكون ضمن المجال [1 ، 0] ، وكلما اقتربت قيمة الاحتمال من الواحد كان احتمال وقوعه و تحققه اكبر و العكس صحيح

وتعطي علاقة الاحتمال بالعلاقة التالية

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية) لـ} A}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة لـ} \Omega} = \frac{c\ \ (A)}{c\ \ (\Omega)} = \frac{N}{S}$$

مثال 1 : عند رمي قطة نقدية مرة واحدة نعرف الحادث A الحصول على الصورة

$\Omega = \{P , F\}$ و $A=\{F\}$ ، card Ω = 2 , card A=1

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية) لـ} A}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة لـ} \Omega} = \frac{c\ \ (A)}{c\ \ (\Omega)} = \frac{1}{2} = 0.5$$

قيمة الاحتمال محصور بين الصفر و الواحد

مثال 2 : عند رمي حجر النرد نعرف الحادث B هو الحصول علي عدد فردي

$\Omega = \{ 1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6$ ، card Ω= 6 و C={1 ,3 ,5 } ، card B=3

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية) لـ} A}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة لـ} \Omega} = \frac{c\ \ (A)}{c\ \ (\Omega)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

2- خواص و قوانين الاحتمالات :

- من اجل أي حادث A مرتبط بتجربة ما Ω مثلا فان قيمة احتماله دائما محصور بين الصفر و الواحد ، وهو دائما موجب $0 \le P(A) \le 1$
- احتمال وقوع الحادث الأكيد هو 1 $\qquad P(\Omega)= 1$

واحتمال وقوع الحادث المستحيل هو 0 $\qquad P(\varnothing) =0$

- إذا كان لدينا A و B حدثين من مجموعة الحوادث الأولية وكان A و B غير متناصفين

أي $A \cap B \neq \emptyset$ فان $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- إذا كان لدينا A و B حدثين من مجموعة الحوادث الأولية وكان A و B متنافيين

أي $A \cap B = \emptyset$ فان $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- إذا كان لدينا A و B و C حودث كيفية من مجموعة الحوادث الأولية و غير متنافية فيما بينها فان

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- إذا كان A حادث و متممه بالنسبة ل Ω هو $\bar{A}$ فان

$$A \cup \bar{A} = \Omega \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ومنه $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- لأي حادثين A و B فان احتمال حدوث A و عدم B يساوي احتمال حدوث A مطروحا منه احتمال حدوث A و B أي : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ ومنه يصبح لدينا

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ وكذلك بالنسبة ل B أي

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})$

- خاصية دي مورغان

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

و لدينا أيضا :

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

ولدينا أيضا

$$P(\bar{A} \cup B) = p(\bar{A}) + p(A \cap B)$$

$$P(A \cup \bar{B}) = p(\bar{B}) + p(A \cap B)$$

مثال 1 : إذا كان لدينا الحادثين A و B حيث أن

$P(A)= 0.3$ و $P(B)=0.6$ و $P(A \cup B) = 0.40$

المطلوب : اوجد : $P(A \cap B)$ ، $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ، $P(B \cap \bar{A})$

الحل :

1- **لدينا** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ومنه يصبح لدينا

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= 0.3 + 0.6 - 0.4 = 0.5$$

2- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) =$

$$1 - P(A \cup B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

3- $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B$

$$=0.6-0.5=0.1$$

مثال 2 : لدي مستودع الجامعة 12 جهاز كمبيوتر منها 2 جهازان عاطلان تسلمت إحدى الكليات 4 أجهزة من هذا المستودع

المطلوب : - إيجاد احتمال عدم وجود جهاز معطل ضمن ما استلمته الكلية ؟

- احتمال وجود جهاز واحد معطل ضمن ما استلمته الكلية ؟

الحل :

لدينا الصيغة العامة لقانون الاحتمال هي

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية) لـ}A}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة لـ}\Omega} = \frac{c\ (A)}{c\ (\Omega)} = \frac{N}{S}$$

ومنه عدد الحالات المواتية لاختيار 4 أجهزة من بين 12 هي

$$C_1^4 = \frac{1\ !}{4!(1\ -4)!} = 495$$

1- حساب احتمال عدم وجود جهاز معطل ضمن ما استلمته الكلية هي

نحسب الاعدد الحالات المواتية لعدم وجود جهاز معطل صمن ما استلمته الكلية

$$C_2^0 \times C_1^4 = \frac{2!}{0!(2-0)!} \times \frac{1\ !}{4!(1\ -4)!} = 210$$

ومنه $$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية) لـ}A}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة لـ}\Omega} = \frac{C_2^0 \times C_1^4}{C_1^4} = \frac{2}{4} = 0.4242$$

2 - حساب احتمال وجود جهاز واحد معطل ضمن ما استلمته الكلية

نحسب عدد الحالات المواتية لوجود جهاز واحد معطل ضمن ما استلمته الكلية هو

$$C_2^1 \times C_1^3 = \frac{2!}{1!(2-1)!} \times \frac{1\ !}{3!(1\ -3)!} = 240$$

ومنه $$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية) لـ}B}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة لـ}\Omega} = \frac{C_2^1 \times C_1^3}{C_1^4} = \frac{2}{4} = 0.4848$$

3- الاحتمال الشرطي :

عادة ما يكون احتمال ظهور أو حدوث حادث معين مثلا B مرتبط بحدوث حادث أخر مثلا A حيث أن A و B حادثين غير مستقلين نسمي هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي و نرمز له بالرمز $P(B/A)$ ، وتقرا كما يلي احتمال وقوع B بشرط (علما) أن A قد وقع فعلا ويعطى بالعلاقة التالية

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

مثال1 : إذا كان احتمال نجاح الطالب في الإحصاء هو 0.75 واحتمال نجاحه في الرياضيات و الإحصاء معا هو 0.18 ، فما هو احتمال نجاحه في الرياضيات علما بأنه قد نجح في الإحصاء

الحل : نجاح الطالب في الإحصاء $P(A)= 0.75$ ، و الرياضيات B

واحتمال نجاحه في الرياضيات و الإحصاء معا هو $P(A \cap B) = 0.18$

$$P\left(B/_A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.7} = \frac{6}{2}$$

مثال 2: في رمي حجر النرد مرة واحدة ما هو احتمال الحصول على الرقم 2 إذا علمت آن النتيجة المتحصل عليها هي عدد أولي

$B=\{2\}$ ومنه $P(B)=1/6$ و $A=\{1, 2, 3, 5\}$ يمثل الأعداد الأولية في التجرة
ومنه $P(A)= 4/6$

$(A \cap B)=\{2\}$ ومنه $P(A \cap B)= 1/6$ يصبح لدينا

$$P\left(B/_A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{3}$$

خواصه :

- لدينا التقاطع عملية تبديليه منه $P\left(B/_A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
- إذا كان لدينا $P\left(B/_A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ و $P\left(A/_B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

يصبح لدينا $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/_A)$ و $P(A \cap B) = P(B) \times$

$P(A/_B)$ ومنه $P(A) \times P(B/_A) = P(B) \times P\left(A/_B\right)$

- $P\left(\Omega/_A\right) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
- $P\left(A/_A\right) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

4- الحوادث المستقلة :

نقول عن حادثين أنهما مستقلان إذا كان تحقق احدهما لا يرتبط بتحقق الحادث الأخر ، ونقول عن حادثين أنهما مرتبطين إذا كان تحقق احدهما يتأثر بتحقق الحادث الأخر ومنه نقول أن الحادث A مستقل عن الحادث B إذا كان احتمال تحقق A لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث B [1]

و لدينا العلاقة التالية $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

و إذا كان لدينا A و B و C حوادث مستقلة عن بعضها البعض فان

$$\mathbf{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)}$$

ملاحظة1 : إذا كان A و B حدثين مستقلين فأنه يكون لدينا كذلك

- B و $\bar{A}$ حدثين مستقلين
- A و $\bar{B}$ حدثين مستقلين
- $\bar{B}$ و $\bar{A}$ حدثين مستقلين

ملاحظة 2 : لدينا من خلال علاقة الاحتمال الشرطي $P\left(B/_A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ فاذا كان A و B حدثين مستقلين فأنه يصبح لدينا

$$\mathbf{P\left(B/_A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)}$$

---

[1]- البشير عبد الكريم – الاحصاء 2- ص 91

ومنه إذا كان A و B حدثين مستقلين فأنه ([1])

$$P\left({}^{B}/_{A}\right) = P(B) \quad و \quad P\left({}^{A}/_{B}\right) = P(A)$$

إن فكرة استقلال الحادثين A و B لا تعني أنهما متنافيين فقد يكونا متنافيين لكنهما غير مستقلين

وقد يكونا مستقلين وهما غير متنافيين[(2)]

مثال 1: لنفرض أننا في رميتين متتاليتين لحجر النرد كان لدينا الحادثان A و B كما يلي

- الحادث A هو الحصول على الرقم 6 في الرمية الأولي
- الحادث B هو الحصول على وجهين مجموعهما في الرميتين يساوي 6

إذا الحادث A هو A=((6 ,1) (6, 2) (6 ,3) (6 , 4) (6 , 5) (6 , 6))

ومنه $P(A) = \frac{6}{3} = \frac{1}{6}$

و الحادث B هو (B=((5 ,1) (4, 2) (3 ,3) (2 , 4) (1 , 5

ومنه $P(B) = \frac{5}{3}$

نلاحظ أن الحادثين A و *B* متنافيين لأنه لا توجد عناصر مشتركة بين A و B أي

$A\cap B = \emptyset$ أي $P(A \cap B) = 0$

أما عن استقلال A عن B لدينا $P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0 \neq P(A)$

أي $P\left({}^{A}/_{B}\right) \neq P(A)$ ومنه A و B غير مستقلين

1- احمد الاشقر – مقدمة في الإحصاء مفاهيم وطرائق – مكتبة الثقافة للنشر و التوزع ط 1999 - عمان الأردن – ص ص 122-123

2- احمد الاشقر – نفس المرجع السابق ص 123-

لنفرض انه لدينا حادث أخر هو C هو الحصول على الرقم 1 في الرمية الثانية

إذا يصبح هو C=((1 ,1) (2, 1) (3 ,1) (4 , 1) (5 , 1) (6 , 1))

ومنه $P(C) = \frac{6}{3} = \frac{1}{6}$

نلاحظ أن الحادثين A و C غير متنافيين لأنه توجد عناصر مشتركة بين A و C آي

$A \cap C = ((6 , 1))$ أي $P(A \cap C) = \frac{1}{3}$

أما عن استقلالهما فلدينا

$$P\left({}^{A}\!/_{C}\right) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = P(A)$$

و لدينا

$$P\left({}^{C}\!/_{A}\right) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = P(C)$$

ومنه فان الحادثان A و C مستقلان عن بعضهما وفي نفس الوقت غير متنافيان

مثال2 : يطلق صيادان نحو هدف معين ، فإذا كان احتمال أن يصيب الصياد الأول الهدف هو 0.80 و احتمال إصابة الصياد الثاني الهدف هو 0.60

المطلوب :

- إيجاد احتمال إصابة الهدف من طرف الصيادين معا
- إيجاد احتمال إصابة الهدف

الحل : نسمي الحوادث التالية

أن يصيب الهدف الصياد الأول P(A)= 0.80

أن يصيب الهدف الصياد الثاني $P(B)= 0.60$

لدينا التجربة الكلية تحتوي على الحوادث التالية $\Omega = \{A\ , B\ , (AB), \square\}$

ومنه الحوادث هي $\Omega = \{P(A \cap \bar{B})\ , P(\bar{A} \cap B)\ , P(A \cap B), P(\bar{A} \cap \bar{B})\}$

1- احتمال إصابة الهدف من طرف الصيادين معا في نفس الوقت هي ; $P(A \cap B)$, ولدينا A و B حدثين مستقلين لان كل صياد مستقل عن الأخر في عملية الرمي (استقلالية التجارب)

ومنه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.80 \times 0.60 = 0.48$

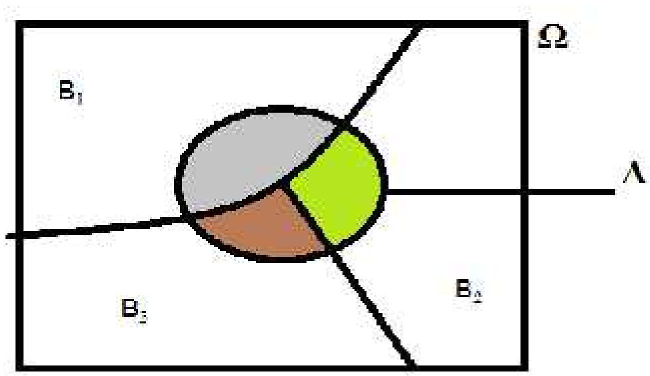
2- احتمال إصابة الهدف أي إما ان يصب A او يصيب B هي $P(A \square B)$

$$P(A \square B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \square B) = 0.80 + 0.60 - 0.48 = 0.92$$

5- الاحتمال الكلي :

في حالات كثيرة قد يكون وقوع حادث ما وليكن A مثلا ، المرتبط بالتجربة Ω لا يتحقق إلا بتحقق احد الحوادث المتنافية فيما بينها وهي $B_1\ , B_2\ , B_3\ , \ldots\ , B_n$ والتي تشكل تجزئة للمجموعة الكلية Ω (فضاء العينة) ، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التوضيحي التالي



من الشكل نلاحظ أن الحادث A هو عبارة عن $A= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$

ولدينا A لا يتحقق إلا بتحقق احد الحوادث المتنافية فيما بينها مثنى مثنى $B_1 \ , B_2 \ , B_3$

أي $Bi \cap Bj = \emptyset \ \forall \ i \neq j$

ولدينا $\cup_{i=1}^{n}(B) = \Omega \Leftrightarrow \cup_{i=1}^{n}(B) = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \dots \cup B_n = \Omega$

ويصبح الحادث A

$$P(A)= P(A \cap B_1)\cup P(A\cap B_2)\cup P(A\cap B_3) \dots\dots\cup P(A\cap B_n)$$

وبما أن الحوادث متنافية يصبح لدينا

$$P(A)= P(A \cap B_1)+ P(A\cap B_2)+ P(A\cap B_3) \dots\dots+ P(A\cap B_n)$$

ولدينا من علاقة الاحتمال الشرطي $P\left(A/_B\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/_B)$$

ومنه يصبح احتمال الحادث A

$$P(A) = P(B_1) \times P\left(A/_{B_1}\right) + P(B_2) \times P\left(A/_{B_2}\right) + P(B_3) \times P\left(A/_{B_3}\right)$$
$$+ \dots \dots + P(B_n) \times P(A/_{B_n})$$

أو باختصار نكتب دستور قانون الاحتمال الكلي $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \times P(A/_{B_i})$

مثال توضيحي :

لدينا ثلاث آلات لإنتاج العلب في مصنع ، تنتج الآلة الأولي 35% و الآلة الثانية 40% و الآلة الثالثة 25% **من الإنتاج الكلي للمصنع** ، فإذا علمت إن نسبة الإنتاج المعيب (غير صالح أو به عطب) من إنتاج كل آلة كما يلي الآلة الأولي 6 % و الآلة الثانية 3% و الآلة الثالثة 8%

فإذا تم اختيار وحدة واحدة من الإنتاج النهائي للمصنع عشوائيا ، فما هو احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة ؟

الحل : انعرف الحوادث التالية

الآلة الأولي 35% نرمز لها $P(A) = 0.35$

الآلة الثانية 40% نرمز لها $P(B) = 0.40$

الآلة الثالثة 25% نرمز لها $P(C) = 0.25$

مجموع الإنتاج هو 100% ، و لنرمز للوحدة المعيبة بالرمز E ومنه

$P(E/A)= 0.06$ (احتمال شرطي) تمثل وحدة معيبة من إنتاج A

$P(E/B)= 0.03$ (احتمال شرطي) تمثل وحدة معيبة من إنتاج B

$P(E/C)= 0.08$ (احتمال شرطي) تمثل وحدة معيبة من إنتاج C

ومنه حسب نظرية الاحتمال الكلي فان احتمال ان تكون الوحدة المسحوبة معيبة هي

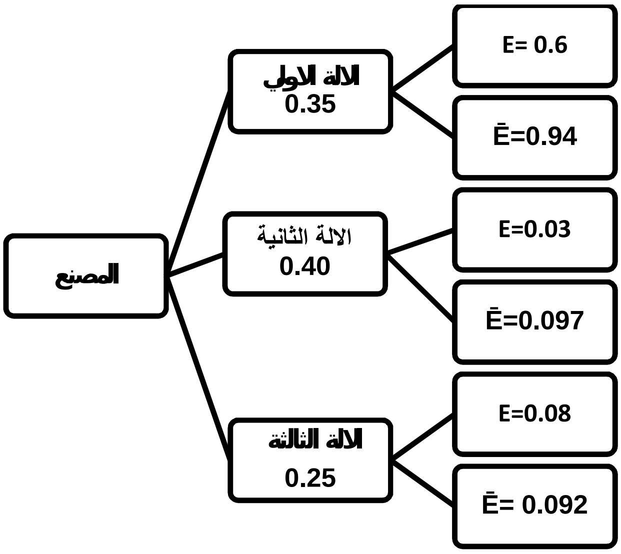
$$E= (E \cap A) \cup (E \cap B) \cup (E \cap C)$$

$$P(E)= P(A \cap A)+ P(A\cap B)+ P(A\cap C)$$

$$P(E) = P(A) \times P\left(E/_A\right) + P(B) \times P\left(E/_B\right) + P(C) \times P\left(E/_C\right)$$

بالتعويض : $P(E) = 0.35 *0.06 + 0.40 * 0.03 + 0.25 * 0.08 = 0.053$

طريقة ثانية باستخدام شجرة الاحتمالات



ومنه $P(E) = 0.35 * 0.06 + 0.40 * 0.03 + 0.25 * 0.08 = 0.053$

6- دستور بايز :

لنفرض أن هناك عدد من الأسباب المعينة التي يؤدي وقوع احدها إلي حدوث حادثة ما ، وهذه الحادثة تقع إذا وقع احد أسبابها ، فنظرية بايز تعتمد على مختلف القوانين السابقة حيث تعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل باتحادها مجموعة كلية و مرافقة لحادث ما ليكن مثلا A .

فلنفرض مثلا انه لدينا مجموعة من الحوادث المتنافية فيما بينها $A_1 , A_2 , A_3 , \ldots\ldots , A_n$ ، والتي تشكل تجزئة للمجموعة الكلية Ω ، و كان B حادث ما يمكن أن يتحقق فقط إذا تحقق احد الحوادث ، $A_1 , A_2 , A_3 , \ldots\ldots , A_n$ ، ونريد أن نحسب الاحتمالات الشرطية $P(A_i/B)$

لكل حادث من تلك الحوادث ، فقانون بايز يستعمل لتحديد احتمال وقوع السبب إذا علمنا حدوث B ، فهو يعطينا إمكانية حساب احتمال تحقق واحد من الأسباب A_i كأرضية في تكوين التأثير المتوقع ، ويعطي بالعلاقة التالية

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i) \times P\left(\frac{B}{A_i}\right)}{P(A_1) \times P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P(A_2) \times P\left(\frac{B}{A_2}\right) + \ldots\ldots + P(A_n) \times P\left(\frac{B}{A_n}\right)}$$

أو بعبارة مختصرة

$$P\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{P(A_i) \times P\left(\frac{B}{A_i}\right)}{\sum P(A_i) \times P\left(\frac{B}{A_i}\right)}$$

مثال توضيحي :

يذهب الطالب إلي الجامعة مستخدما في تنقله إحدى الوسائل التالية بالنسب التالية ، الحافلة 60% و السيارة 30% ، القطار 10% في أيام دراسته ، فإذا كان احتمال أن يتأخر عن الدراسة إذا استخدم الحافلة 15% ، وإذا استخدم السيارة هو8% ، و إذا استخدم القطار 20% خلال أيام دراسته ، فإذا اخترنا احد الأيام التي يذهب فيها الطالب إلي الجامعة بصفة عشوائية

المطلوب : - حساب احتمال أن يتأخر في ذلك اليوم عن الدراسة ؟

إذا علمت انه كان متأخر عن الدراسة في ذلك اليوم فما هو احتمال أن يكون قد استخدم القطار ؟

الحل : نرمز للحوادث التالية كما يلي

A_1 استخدام الحافلة 60% أي $P(A_1) = 0.60$

A_2 استخدام السيارة 30% أي $P(A_2) = 0.30$

A_3 استخدام القطار 10% أي $P(A_3) = 0.10$

و نرمز لحادث تأخر الطالب عن الدراسة عن الجامعة ب B ومنه يصبح لدينا

$P\left(B/A_1\right) = 0.15$ هو احتمال تأخر الطالب عن الجامعة إذا استعمل الحافلة

$P\left(B/A_2\right) = 0.08$ هو احتمال تأخر الطالب عن الجامعة إذا استعمل السيارة

$P\left(B/A_3\right) = 0.20$ هو احتمال تأخر الطالب عن الجامعة إذا استعمل القطار

1- حساب احتمال ان يتأخر في ذلك اليوم عن الدراسة هنا نستعمل قانون الاحتمال الكلي

$$B= (B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3)$$

$$P(B)= P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)$$

ومنه

$$P(B) = P(A_1)\times P\left(B/A_1\right) + P(A_2)\times P\left(B/A_2\right) + P(A_3)\times P\left(B/A_3\right)$$

بالتعويض $P(B) = (0.6)\times(0.15) + (0.3)\times(0.08) + (0.1)\times(0.2) = 0.134$

2- إذا كان الطالب متأخر عن الدراسة في ذلك اليوم فاحتمال إن يكون قد استخدم القطار هنا نستخدم دستور بايز

$$P\left(A_3/B\right) = \frac{P(A_3)\times P\left(B/A_3\right)}{P(A_1)\times P\left(B/A_1\right) + P(A_2)\times P\left(B/A_2\right) + P(A_3)\times P\left(B/A_3\right)}$$

بالتعويض :

$$\mathbf{P\left(A_3/B\right)} = \frac{(0.1)\times(0.2)}{(0.6)\times(0.1\ \ )+(0.3)\times(0.0\ \ )+(0.1)\times(0.2)} = \frac{(0.1)\times(0.2)}{0.1} = \frac{1}{6}$$

مثال توضيحي الثاني : ليكن لدينا ثلاثة صناديقA و B و C تحتوي على كرات ، حيث يحتوي الصندوق A على 2 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و الصندوق B يحتوي على 4 كرات بيضاء

و 1 كره سوداء و الصندوق C يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء ،نختار عشوائيا صندوق ثم نختار منه كرة

المطلوب :

- إذا علمت أن الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق A
- إذا علمت أن الكرة المسحوبة سوداء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق C

الحل : نرمز للحوادث التالية

عملية اختيار كل صندوق تكون بالاحتمالات التالية (لها نفس الاحتمالات)

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad و \quad P(A) = \frac{1}{3} \quad و \quad P(C) = \frac{1}{3}$$

واحتمالات أن تكون الكرة بيضاء L أو سوداء N من الصناديق الثلاثة هي

$$P\left(\frac{L}{C}\right) = \frac{3}{7} \quad ،P\left(\frac{L}{B}\right) = \frac{4}{5} \quad ، \quad P\left(\frac{L}{A}\right) = \frac{2}{5}$$

$$P\left(\frac{N}{C}\right) = \frac{4}{7} \quad ، \quad P\left(\frac{N}{B}\right) = \frac{1}{5} \quad ، \quad P\left(\frac{N}{A}\right) = \frac{3}{5}$$

1- حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء

$$P(L) = P(A) \times P\left(\frac{L}{A}\right) + P(B) \times P\left(\frac{L}{B}\right) + P(C) \times P\left(\frac{L}{C}\right)$$

بالتعويض $P(L) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{2}{1} + \frac{4}{1} + \frac{3}{2} = 0.5428$

ثم نستخدم دستور بايز لحساب إذا علمنا أن الكرة المسحوبة بيضاء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق A

$$P\left({}^{A}/_{L}\right) = \frac{P(A) \times P\left({}^{L}/_{A}\right)}{P(A) \times P\left({}^{L}/_{A}\right) + P(B) \times P\left({}^{L}/_{B}\right) + P(C) \times P({}^{L}/_{C})}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{0.5428} = 0.2456$$

2- حساب احتمال اذا علمنا ان الكرة المسحوبة سوداء فما هو احتمال ان تكون من الصندوق C

$$P(A) = P(A) \times P\left({}^{N}/_{A}\right) + P(B) \times P\left({}^{N}/_{B}\right) + P(C) \times P({}^{N}/_{C})$$

بالتعويض $P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} = 0.4571$

ثم نستخدم دستور بايز لحساب إذا علمنا أن الكرة المسحوبة سوداء فما هو احتمال أن تكون من الصندوق C

$$P\left({}^{C}/_{N}\right) = \frac{P(C) \times P\left({}^{N}/_{C}\right)}{P(A) \times P\left({}^{N}/_{A}\right) + P(B) \times P\left({}^{N}/_{B}\right) + P(C) \times P({}^{N}/_{C})}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{7}}{0.4571} = 0.4167$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول: رمينا زهرتي نرد مرة واحدة فقط فأوجد فضاء العينة للتجربة العشوائية ؟

فإذا عرفنا الحوادث التالية

A مجموع النتيجتين اكبر أو يساوي 8

B مجموع النتيجتين اكبر تماما من 10

C مجموع النتيجتين عدد زوجي و اكبر من 6

فأوجد الاحتمالات التالية :

$p(A \cup B)$ ، $p(A \cap B)$ $p(B \cup C)$ ، $p(B \cap C)$ ، $p(\overline{A \cup B})$ $p(\overline{A \cap B})$ ، $p(B/A)$

التمرين الثاني : ليكن لدينا الحادثان: A, B حيث

$P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.6$

فاوجد : $p(A/B)$ و $p(B/A)$

- هل الحادثان A, B مستقلان ؟

التمرين الثالث: أحسب الاحتمالات التالية: إذا علمت أن: $P(A) = \frac{3}{8}$، $P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $P(A \cup B), P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(\bar{A} \cap \bar{B}), P(\bar{A} \cup B), P(A \cup \bar{B}), P(\bar{A} \cap B)$ ، $p(A/B)$، $p(B/A)$ ، $p(\overline{A \cap B})$

التمرين الرابع : ليكن لدينا الحدثين: A, B مستقلين حيث أن: $Card(B) = 30$ ، $Card(A) = 50$ ، $P(A \cap B) = 0.15$ ،اوجد: أصلي $Card(\Omega)$ ، و $p(A \cup B)$ ثم استنتج $p(\bar{A} \cap \bar{B})$

واحسب الاحتمالات التالية $p(\overline{A \cap B})$ ، $p(A/B)$ ،

التمرين الخامس:دلت المعطيات الإحصائية لقسم علوم التسيير أن 25% من الطلبة يرسبون في الاقتصاد الجزئي ، و 15% يرسبون في الإحصاء ، و 10 % يرسبون في الاقتصاد الجزئي و الإحصاء معا

- إذا كان الطالب قد رسب في الإحصاء فما هو احتمال ان يكون قدر رسب في الاقتصاد الجزئي
- إذا كان الطالب قد رسب في الاقتصاد الجزئي فما هو احتمال أن يكون قدر رسب في الإحصاء

- ما هو احتمال ان يكون الطالب قد رسب في الاقتصاد الجزئي أو الإحصاء
-إذا كان الطالب لم يرسب في الاقتصاد الجزئي فما هو احتمال أن لا يكون قدر رسب في الإحصاء

التمرين السادس: يوجه صيادان بندقيتيهما معا إلى غزال فإذا كانت فرصة كل منهما في إصابة الغزال هي3/1

õ فأحسب - احتمال إصابة الغزال. ، - أن يصب الغزال احدهما فقط ، -ألا يصيبا الغزال معا

التمرين السابع: أطلقنا ثلاث طلاقات على هدف معين وكانت احتمالات إصابة الهدف علي الترتيب كما يلي : إصابة الهدف بالطلقة الأولي هي 0.4، و إصابة الهدف بالطلقة الثانية هي0.5 ،وإصابة الهدف بالطلقة الثالثة هي 0.7

-احسب احتمال أن الهدف يصاب بطلقة واحدة فقط
- احسب احتمال أن يصاب الهدف بطلقتين على الأقل
- احسب احتمال أن الهدف يصاب

التمرين الثامن:_في مصنع لأحد المنتجات، تنتج الآلة A 30% والآلة B 50% والآلة C 20% من كمية الإنتاج، فإذا علمت أن نسبة العطب هي على الترتيب: 2%، 3%، 4%. أخذنا عشوائيا وحدة من إنتاج هذه المؤسسة.

المطلوب:

1) ما هو احتمال أن يكون بها عطبا؟
2) إذا علمت أن بها عطبا ما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة A ؟
3) إذا علمت أن بها عطبا ما هو احتمال أن تكون ليست من إنتاج الآلة C ؟

التمرين التاسع : ليكن لدينا ثلاثة أكياس فاكهة ، يحتوي الكيس الأول على 3 تفاحات و 6 برتقالات ، و يحتوي الكيس الثاني على 6 تفاحات و 4 برتقالات و يحتوي الكيس الثالث على 5 تفاحات و 4 برتقالات ، تم اختيار احد الأكياس عشوائيا ، و تم اختيار منه حبة فاكهة بطريقة عشوائية

1) فأوجد احتمال أن تكون حبة الفاكهة تفاح ؟

2) أوجد احتمال أن تكون حبة الفاكهة من الكيس الأول إذا علم بأنها تفاحة ؟

التمرين العاشر: أنتج أحد المصانع 12 جهاز تلفاز من بينها 4 أجهزة عاطلة، أخذنا بطريقة عشوائية جهازين، أوجد الاحتمالات التالية

1- احتمال الحصول على جهازين عاطلين،

2- احتمال الحصول على جهازين جيدين،

3- احتمال الحصول على جهاز عاطل على الأقل،

4- احتمال الحصول على جهاز عاطل على الأكثر.

الفصل الثاني المتغيرات العشوائية

أولا المتغيرة العشوائية المنقطعة و مميزاتها العددية

- أ -قانون التوزيع الاحتمالي (دالة الاحتمل)
- ب-التمثيل البياني للمتغير العشوائي المقطع
- ج-دالة التوزيع الاحتمالي
- د- المميزات العددية للمتغير العشوائي المقطع

ثانيا المتغيرة العشوائية المستمرة و مميزاتها العددية

- دالة الكثافة الاحتمالية
- دالة التوزيع $F(x)$
- المميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر

الفصل الثاني : المتغيرات العشوائية

تمهيد :

رأينا سابقا أن نتائج جميع التجارب العشوائية تكون غير معروفة بصورة مسبقة ، إلا أنها لا تخرج عن مجال معين من القيم ، هذه النتائج تختلف بالاختلاف التجرة وبعدد تكرار هذه التجرة ، حيث هناك تجارب تكون نتائجها كمية عددية مثل رمي زهرة النرد و ملاحظة النتائج ، فالنتائج تكون ممثلة بالأرقام والتي عرفنها بفراغ التجرة أو فضاء العينة و رمزنا لها بΩ ، وهناك تجارب تكون نتائجها نوعية (كيفية) مثل تجرة رمي قطعة نقدية مرة أو مرتين و ملاحظة النتائج التي تظهر فالنتائج هنا تكون كيفية لكننا نستطيع أن نعبر على حالة حصولنا على الوجه مثلا بالنجاح و نعبر عنه بالرقم 1 و عدم الحصول على الوجه بالفشل و نعبر عليه ب 0 ، إذا مهما كانت طبيعة التجرة العشوائية وصفة النتائج المتحصل عليها فانه يمكننا أن نرط كل نتيجة من نتائجها (أي كل عنصر من عناصر فضاء العينة) بعدد وحيد من $\Re$ [1]

مجموعة الأعداد الحقيقية

ملاحظة : إن كل المصطلحات المستعملة في الإحصاء الوصفي تبقي صالحة للاستعمال عند استعمال المتغيرات العشوائية ، الشيء الوحيد الذي يختلف هو استبدال التكرارات بالاحتمالات فقط

تعريف المتغيرة العشوائية:

المتغيرة العشوائية هي دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة Ω ، أي أننا نرفق بكل عنصر من فضاء العينة قيمة حقيقية (عدد ما) ونكون بذلك عرفنا دالة على هذا الفضاء

هذه الدالة تسمي المتغيرة العشوائية نرمز لها بأحرف كبيرة X أو Y

ونكتب $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$

إن X كمتغيرة عشوائية تأخذ القيم الممكنة التالية $X_1 , X_2 , X_3 , ..., X_n$

---

[1]– السعدي الرجال – مرجع سابق ص 200

وكل قيمة ممكنة تقابلها قيمة احتمالية (اي احتمال مقابل لها)هو

P_1 ,P_2 ,P_3 ....P_n و تمثل المتغيرة العشوائية X على الشكل التالي

X_i القيم الممكنة لها	X_1	X_2	X_3	....	X_n
P_i قيم الاحتمالات المقابلة	P_1	P_2	P_3	....	P_n

أمثلة عن المتغيرات العشوائية

- مثلا رمي زهرة النرد مرة واحدة ولنعرف مثلا X متغير عشوائي يمثل ظهور الأعداد الفردية التي تظهر ومنه : $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $X = \{0 ,1\}$
- رمي زهرتي نرد ولنعرف مثلا X متغير عشوائي يمثل مجموع الرميتين

$X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $X = \{2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10 ,11 ,12\}$

- رمي قطعة نقدية ثلاث مرات ولنعرف مثلا X متغير عشوائي يمثل عدد الأوجه التي تظهر

$X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $X = \{0 ,1 ,2 ,3\}$

ملاحظة : تختلف المتغيرات العشوائية بحسب فضاء العينة المعرفة عليها ، فإذا كان فضاء العينة Ω قابل للعد و منتهي أو غير منتهي وقابل للعدد فتكون المتغيرة العشوائية هنا منفصلة أو منقطعة ، أما إذا كان فضاء العينة غير قابل للعدد أي يأخذ عدد غير منتهي من القيم داخل مجال معلوم $[-\infty \ , +\infty]$ فان المتغيرة العشوائية تكون مستمرة أو متصلة [1]

أولا المتغيرة العشوائية المنقطعة و مميزاتها العددية :

أ- **تعريفها** :المتغيرة العشوائية المنقطعة أو المنفصلة هي المتغيرة التي تأخذ عدد محدود من القيم أو عدد غير محدود من القيم لكنها قابلة للعدد [2] ، مثل عدد الزائن الذين يتوافدون على مطعم ما خلال يوم ، أو عدد القطع الفاسدة في إنتاج مصنع ما أو مجموع نتيجة

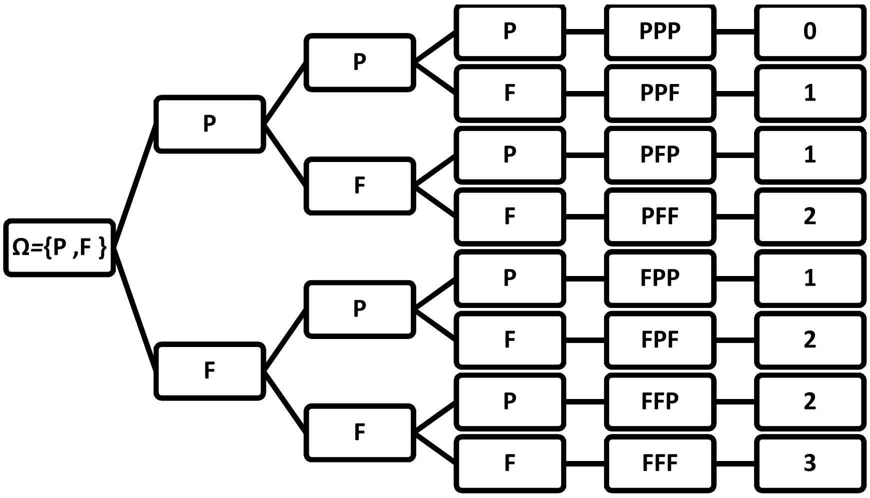
[1]- محمد يوسف الاشقر و عبد اللطيف يوسف – مرجع سابق – ص 144

[2]- شفيق العتوم - مرجع سابق – ص 232

زهرتي نرد ، وكذلك بالنسبة للتجارب العشوائية التي تكون نتائجها نوعية فانه يمكن تحولها من متغيرة نوعية إلى متغيرة رقمية

ب – قانون التوزيع الاحتمالي (دالة الاحتمال) :

لنفرض أننا رمينا قطعة نقدية متزنة ثلاث مرات، ولنعرف X متغير عشوائي يمثل عدد الأوجه (F) التي تظهر في الرميات الثلاث



X متغير عشوائي يمثل عدد الأوجه (F) التي تظهر في الرميات الثلاث و فراغ التجربة هو

$\Omega =\{ PPP ,PPF ,PFP ,PFF ,FPP , FPF ,FFP ,FFF \}$ حيث $Card\ \Omega = 2^3=8$

$X : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}$ إذا $X = \{0 ,1 ,2 , 3\}$ والتي تمثل قيم المتغيرة العشوائية

أما الاحتمالات المرفقة لقيم المتغيرة العشوائية هي

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

بمعني أخر فان المتغيرة العشوائية عبارة عن تطبيق مجال تعرفه هو فراغ الحوادث الأولية ومداه هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

ويمكن كتابة التوزع الاحتمالي $P(X = Xi)$ لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي المنفصل في جدول يسمي جدول التوزع الاحتمالي او قانون التوزع الاحتمالي

X_i القيم الممكنة لها	0	1	2	3
P_i قيم الاحتمالات المقابلة	$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{8}$

ويمكن كتابة الجدول السابق على شكل دالة تسمي دالة الاحتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}\ , & x = 0 \quad , \quad x = 3 \\ \frac{3}{8}\ , & x = 1 \quad , \quad x = 2 \\ 0 \quad , & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

و منه إذا كان لدينا المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم $X= \{ X_1 , X_2 , X_3 , \ldots, X_n \}$

وكان $f(X) = P(X = Xi)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيم X فانه يمكن تكوين جدول التوزع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، وهو جدول مكون من عمودين الأول به القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X= \{ X_1 , X_2 , X_3 , \ldots, X_n \}$ و العمود (أو السطر) الثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $f(X) = P(X = Xi)$ ويكون شكله كما يلي

X_i القيم الممكنة لها	X_1	X_2	X_3	....	X_n
P_i قيم الاحتمالات المقابلة $f(X) = P(X = Xi)$	P_1	P_2	P_3	....	P_n

نسمي هذا الجدول بقانون التوزع الاحتمالي أو جدول الاحتمال ، ونسمي الدالة

$f(X) = P(X = Xi)$ بدالة الاحتمال ويمكن كتابتها على الشكل التالي

$$f(x) = \begin{cases} P_1 & , X = X_1 \\ P_2 & , X = X_2 \\ P_3 & , X = X_3 \\ \vdots & , \vdots \quad \vdots \\ P_n & X = X_n \\ 0 & , \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

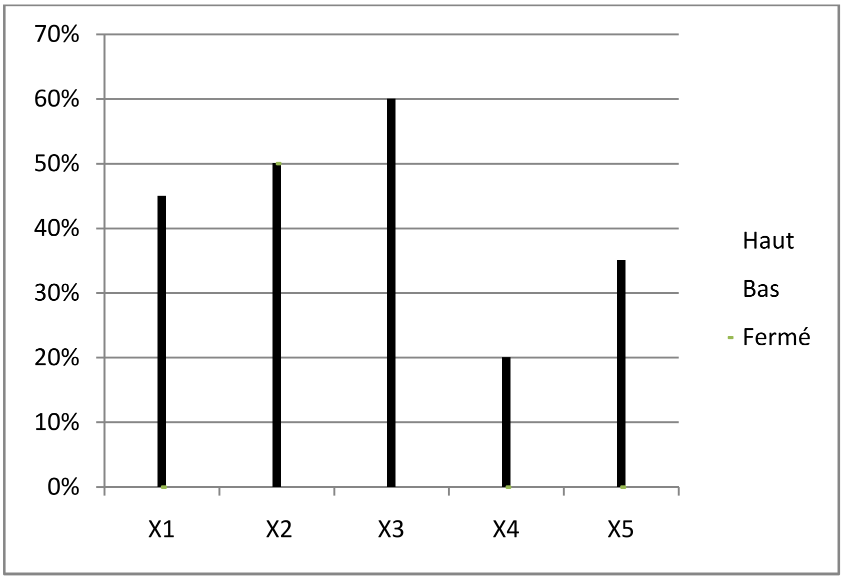
ملاحظة مهمة : حتى يكون التوزع العشوائي قانون توزع احتمالي أو جدول توزع احتمالي أو دالة احتمال يجب أن يحقق الشرطين التاليين (1)

الشرط الأول : الدالة موجبة وقيمها محصورة بين $0 \le f(X) = P(X = X_i) \le 1$

الشرط الثاني : مجموع الاحتمالات يساوي الواحد $\sum_{i=1}^{\infty} f(X) = P(X = X_i) = 1$

ج- التمثيل البياني للمتغير العشوائي المنقطع :

يمكن تمثيل قانون التوزع الاحتمالي أو المتغيرة العشوائية المنفصلة بيانيا عن طرق الأعمدة البيانية البسيطة حيث يتم وضع قيم المتغيرة العشوائية X_i على محور الفواصل ورسم أعمدة عند هذه النقاط تتناسب أطوالها مع قيم الاحتمالات المقابلة لها (P_i)



مثال : هل يمثل المتغير العشوائي التالي قانون توزع احتمالي

1- بوعظم كمال – الإحصاء الاستدلالي من الجانب النظري و التطبيقي – دار زهران للنشر –عمان الاردن ص 37

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1}, & x = 1\ ,2\ ,3\ ,4 \\ 0, & \text{ماعدا ذالك} \end{cases}$$

نلاحظ أن القيم التي تأخذها X_i موجبة ومنه $f(x) = \frac{x}{1}$ كذلك موجبة و ما عدا هذه القيم فان $f(x) = 0$ وبالتالي الشرط الأول محقق

أما الشرط الثاني لدينا

$$\sum_{i-1}^{\infty} f(X) = P(X = X_i) = \sum_{x-1}^{4} \frac{X_i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

ومنه الشرط الثاني محقق ومنه المتغير العشوائي يمثل قانون توزع احتمالي

د- دالة التوزع الاحتمالي (تابع التوزع أو الدالة التجميعية):

تنشا هذه الدالة من خلال الاحتمال المتجمع الصاعد للاحتمالات ، فأحيانا نحتاج إلي معرفة مجموعة الاحتمالات التي تقل قيمتها عن قيمة معينة أو تزد عنها للمتغير العشوائي X_i هنا نستعمل دالة التوزع الاحتمالي او تابع التوزع الاحتمالي ويرمز لها بالرمز $\mathcal{F}(x)$ ويعبر عن هذه الدالة بالصيغة التالية $\mathcal{F}(x) = p\,(x \le x_i)$ إذا كانت X تاخذا عددا منتهيا من القيم فان $\mathcal{F}(x)$ يمكن تعرفها

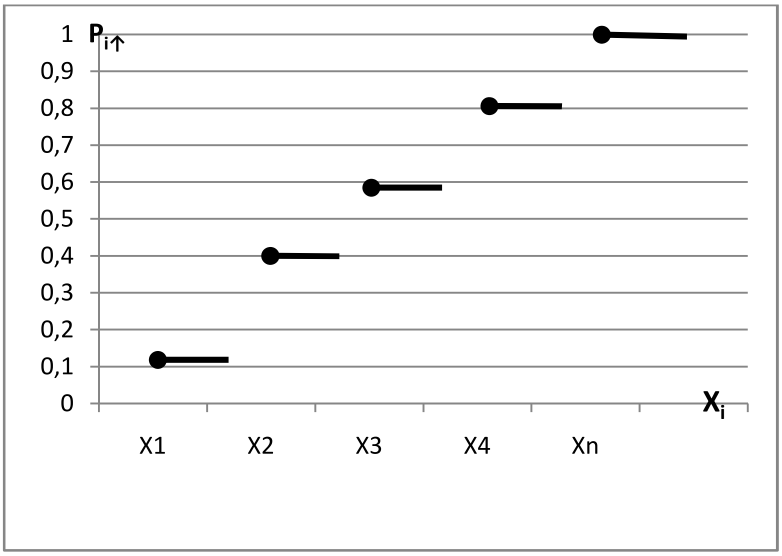
$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_i) = 1 & x_N \le x < x \end{cases}$$

وتعطي دالة التوزع في الجدول كما يلي

X_i القيم الممكنة لها	X_1	X_2	X_4	……..	X_n
$\mathcal{F}(X) = P(X \le X)$	P_1	P_1+P_2	$P_1+P_2+P_3$	……	1

جدول دالة التوزع للمتغير العشوائي المنقطع

ويمكن تمثيله بيانيا عن طرق قطع مستقيمة متصاعدة



خواص دالة التوزيع :

- إن تابع التوزيع يحقق دائما العلاقة $0 \le \mathcal{F}(x) = p(x \le x_i) \le 1$
- أنها عبارة عن احتمالات تجميعية (مجموع الاحتمالات)
- أنها دالة تصاعدية متزايدة دوما لأنها عبارة عن مجموع الاحتمالات
- إن قيمة دالة التوزيع عند النقطة $(-\infty)$ تساوي الصفر $\mathcal{F}(-\infty) = 0$
- إن قيمة دالة التوزيع عند النقطة $(+\infty)$ تساوي الواحد $\mathcal{F}(+\infty) = 1$ لانها تكون قد شملت جميع القيم الممكنة

$$\forall (a,b) \in \mathfrak{R} ; \quad P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

مثال : ليكن المتغير العشوائي التالي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & x = 1\ ,2\ ,3\ ,4 \\ 0, & \text{ماعدا ذالك} \end{cases}$$

المطلوب :اوجد دالة التوزيع ومثلها بيانيا ومثل كذلك دالة الاحتمال (قانون الاحتمال)

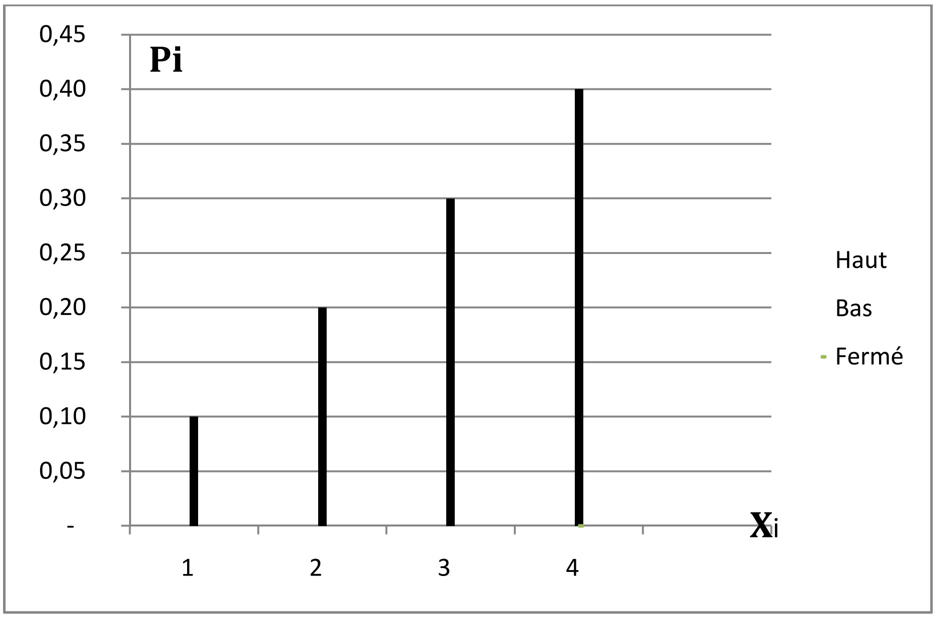
الحل : دالة الاحتمال (جدول التوزيع الاحتمالي) و دالة التوزيع

القيم الممكنة لها X_i	1	2	3	4	المجموع
$f(X) = P(X = Xi)$	1/10	2/10	3/10	4/10	10/10
$\mathcal{F}(X) = P(X \leq X)$	1/10	3/10	6/10	10/10	1

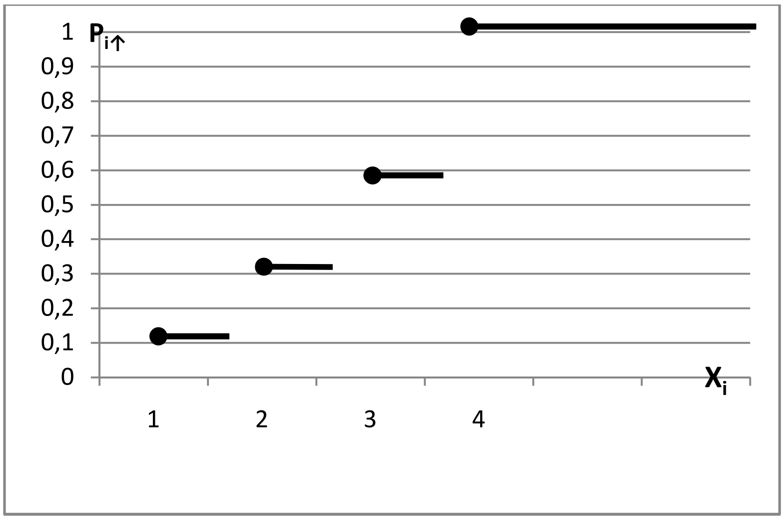
دالة التوزع

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{1} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{1} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{6}{1} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x < +\infty \end{cases}$$

التمثيل البياني لقانون التوزع الاحتمالي او دالة الاحتمال



التمثيل البياني لدالة التوزع



د- المميزات العددية للمتغير العشوائي المنقطع :

1- **التوقع الرياضي E(X)** : تتمركز معظم قيم المتغيرات العشوائية حول قيمة معينة أو قيمة متوقعة (هي الوسط أو المتوسط الحسابي) لتوزع المتغير العشوائي $\mathbf{X_i}$ ويرمز لها بالرمز **E(X)** أو الرمز **µ(X)** [1] ، فإذا كانت X متغيرة عشوائية منفصلا تأخذ القيم الممكنة التالية X_1 , X_2 , X_3 , ..., X_n باحتمالات تقابلها P_1 ,P_2 ,P_3 ....P_n فان القيمة المتوقعة أو التوقع الرياضي له يعطى بالعلاقة التالية

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n}[X \quad \times \quad P(\, X = X \,)]} \quad \text{او} \quad \mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n}(X \quad \times \quad P\,)}$$

أي أن التوقع الرياضي هو عبارة عن حاصل جمع القيمة المختلفة للمتغيرة $\mathbf{X_i}$ مضروبا في قيم الاحتمالات المقابلة لها

خواص التوقع الرياضي :

- **E(C) = C** حيث **C** ثابت
- **E(C+X) = C + E(X)**
- **E(CX) = C E(X)**
- **E[E(X)] = E(X)**

مثال : احسب التوقع الرياضي للمثال السابق

---

[1]- محمد يوسف اشقر – مرجع سابق - ص 156

القيم الممكنة لها X_i	1	2	3	4	المجموع
$f(X) = P(X = Xi)$	1/10	2/10	3/10	4/10	10/10

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i-1}^{n}[X \quad \times \quad P(\,X = X\,)]}$$

$$\Box\ \mathbf{E(X) = 1 \times \frac{1}{1} + 2 \times \frac{2}{1} + 3 \times \frac{3}{1} + 4 \times \frac{4}{1} = \frac{3}{1} = 3}$$

2- التباين V(X): التباين هو احد مقاييس التشتت و يعبر عن مدى تشتت مختلف القيم حول القيمة المتوسطة أو الوسط و هو عبارة عن العزم المرئز الثاني أو من الدرجة الثانية لذلك سوف نتعرف على العزوم

– العزوم M: العزم بمعناه الملموس مصطلح ميكانيكي يشير إلي مقياس للقوة حول نقطة مرئزية ، أما في الإحصاء فانه فكرة معنوية غير ملموسة ، وتستخدم العزوم في قياس الالتواء و التفرطح (التدبب)[1]

- **العزوم البسيطة أو الابتدائية:** و يرمز لها بالرمز M (وهي العزوم حول نقطة الأصل) العزوم البسيطة من الرتبة K هو عبارة عن التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) لقيم المتغيرة العشوائية مرفوعة إلي قوة K [2] ورمزها $M_K(X)$ وتعطي بالعلاقة التالية

$M_K(X) = \sum_{i-1}^{n} Xi^K P(X = Xi)$ حيث K درجة العزم الابتدائي

إذا العزم الابتدائي من الدرجة الأولي K=1 هو التوقع الرياضي

- **العزوم المرئزية μ :** و هي تكون حول الوسط الحسابي و نرمز لها بالرمز μ_K وتعطي بالعلاقة التالية $\mu_K(X) = \sum_{i-1}^{n}[Xi - E(X)]^K \;\; P(X = Xi)$

ملاحظة :

- إذا كان: $E(X) = 0$ نكون في حالة العزوم البسيطة الابتدائية
- إذا كان : $K = 0 \Rightarrow \mu_0 = 1$
- إذا كان : $K = 1 \Rightarrow \mu_1 = 0$
- إذا كان : $K = 2 \Rightarrow \mu_2 = V(X)$ أي هو التباين

[1] - شفيق العتوم ، مرجع سابق ، ص 117

[2] جيلا لي جلاطو ، نظرية الاحتمالات و التوزعات الاحتمالية مرجع سابق ، ص 95

ومنه تعطي علاقة التباين بالعلاقة التالية

$$V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$$

حيث $M_2(X)$ هو العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

$$M_2(X) = \sum_{i=1}^{n} Xi^2 P(X = Xi)$$

خواص التباين :

- $V(C)=0$
- $V(C+X) = V(X)$
- $V(CX) = C^2 V(X)$

3 – الانحراف المعياري $\delta(x)$:

هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين [1] و يرمز له بالرمز $\delta(x)$ ، **و** يعطي بالعلاقة التالية

$$\delta_x = \sqrt{V(X)}$$

فهو من أكثر المقاييس استخداما، لأنه يعطي فكرة سليمة عن تشتت الظاهرة المدروسة [2]

مثال : احسب التباين و الانحراف المعياري للمثال السابق

القيم الممكنة لها X_i	1	2	3	4	المجموع
$f(X) = P(X = Xi)$	1/10	2/10	3/10	4/10	10/10

التباين : $V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$

نحسب أولا العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

1 - برنار غريه ، مرجع سابق ، ص 158

2 - شرف الدين خليل ، مرجع سابق ، ص 63

$$M_2(X) = \sum_{i-1}^{n} Xi^2P(X = Xi) = 1^2 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{2}{10} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 4^2 \times \frac{4}{10}$$
$$= \frac{99}{10} = 9.9$$

ولدينا التوقع الرياضي $\mathbf{E(X) = 3}$ ومنه

$$V(X) = 9.9 - (3)^2 = 0.9$$

ومنه الانحراف المعيار $\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.9} = 0.948$

تمارين محلولة

التمرين الأول : سحبنا كرتان من صندوق به 3 كرات حمراء و 2 بيضاء ، ولنعرف المتغير العشوائي X يتمثل في عدد الكرات الحمراء المسحوبة

المطلوب :

- كون جدول التوزع الاحتمالي للمتغير العشوائي ؟
- اوجد التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعيار له ؟

الحل : لدينا X يتمثل في عدد الكرات الحمراء المسحوبة يعني إما نسحب كرتان 2 أو كرة واحدة1 أو لا نسحب أي كرة حمراء 0 يعني $X = \{0, 1, 2, \}$

$$P(X = 0) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية)}}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة}} = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{1}$$

$$P(X = 1) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية)}}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة}} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{1}$$

$$P(X = 2) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية)}}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة}} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{1}$$

ومنه جدول التوزع الاحتمالي (قانون التوزع الاحتمالي)

القيم الممكنة لها X_i	0	1	2	المجموع
$f(X) = P(X = Xi)$	1/10	6/10	3/10	10/10

التوقع الرياضي : $E(X) = \sum_{i-1}^{n} X \times P(X = X)$

$$\square\ E(X) = 0 \times \frac{1}{1} + 1 \times \frac{6}{1} + 2 \times \frac{3}{1} = \frac{1}{1} = 1.2$$

التباين : : $V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$

نحسب أولا العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

$$M_2(X) = \sum_{i-1}^{n} Xi^2 P(X = Xi) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{6}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} = \frac{18}{10} = 1.8$$

ولدينا التوقع الرياضي $E(X) = 1.2$ ومنه

$$V(X) = 1.8 - (1.2)^2 = 0.36$$

ومنه الانحراف المعيار $\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.36} = 0.6$

التمرين الثاني : إذا كان من المعلوم أن نسبة مبيعات احد المراكز التجارية من التفاح المحلي هو 0.60 بينما نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح الأجنبي هو 0.40 ، اشترى احد العملاء عبوتين

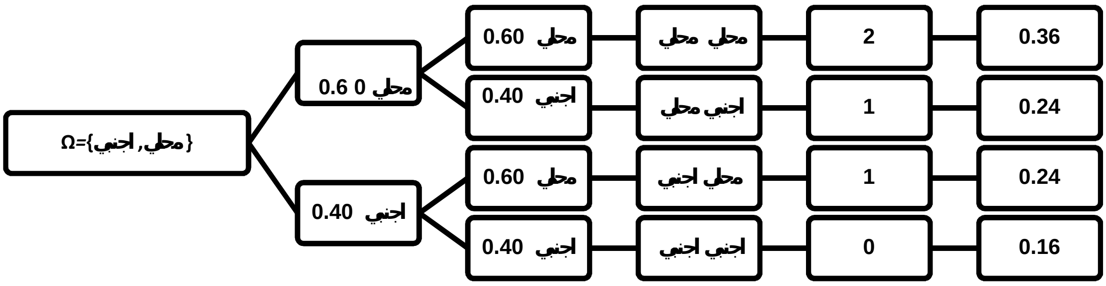
المطلوب :

- كون فضاء العينة (فراغ العينة)
- إذا عرفنا المتغير العشوائي X بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح المحلي فاوجد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X
- ارسم دالة الاحتمال أو دالة قانون التوزيع الاحتمالي

- اوجد دالة التوزيع واحسب كل من التوقع الرياضي و التباين
- اوجد قيم الاحتمالات التالية

$P(X = 1)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \le 1.5)$

الحل : فراغ التجربة يتكون من أربعة نتائج لأن التجربة هي شراء عبوتين ، فإما أن تكون كلا العبوتين تفاح محلي أو احدهما محلي والأخرى أجنبي أو كلاهما تفاح أجنبي ، ولدينا المتغير العشوائي X الذي عرفناه بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح المحلي



ومنه قيم المتغير العشوائي X التي يأخذها هي $X = \{0, 1, 2,\}$ باحتمالات هي

$$P(X = 0) = 0.06 \times 0.6 = 0.36$$

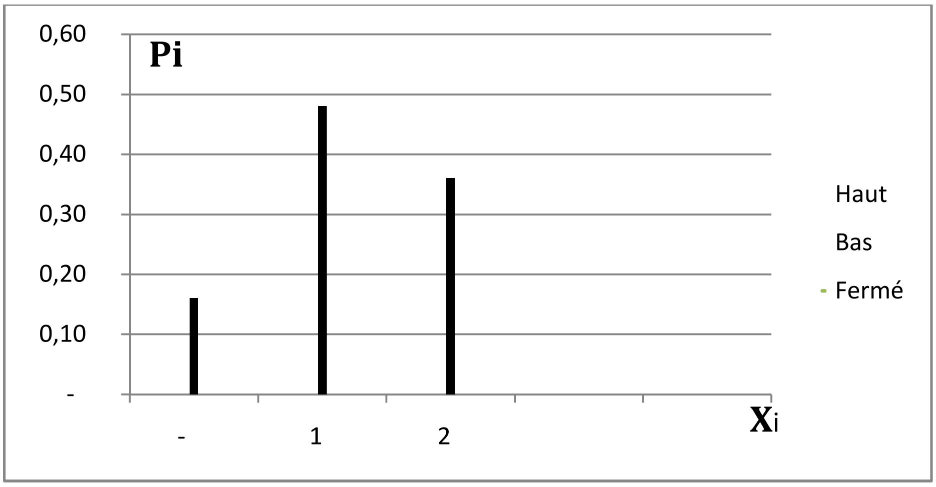
$$P(X = 1) = 0.6 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 = 0.48$$

$$P(X = 2) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

ومنه جدول التوزيع الاحتمالي (قانون التوزيع الاحتمالي)

القيم الممكنة لها X_i	0	1	2	المجموع
$f(X) = P(X = Xi)$	0.16	0.48	0.36	1

رسم دالة الاحتمال أو دالة قانون التوزيع الاحتمالي



إيجاد دالة التوزيع

X_i القيم الممكنة لها	0	1	2	المجموع
$f(X) = P(X = Xi)$	0.16	0.048	0.36	1
$\mathcal{F}(X) = P(X \leq X)$	0.16	0.46	1	1

دالة التوزيع

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 & 0 \leq x < 1 \\ 0.4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

حساب كل من التوقع الرياضي و التباين

التوقع الرياضي : $E(X) = \sum_{i-1}^{n} X \times P(X = X)$

☐ $E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1.2$

التباين: : $V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$

نحسب أولا العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

$$M_2(X) = \sum_{i-1}^{n} Xi^2 P(X = Xi) = 0^2 \times 0.16 + 1^2 \times 0.48 + 2^2 \times 0.36$$
$$= 1.92$$

ولدينا التوقع الرياضي $\mathbf{E(X) = 1.2}$ ومنه

$$V(X) = 1.92 - (1.2)^2 = 0.48$$

حساب قيم الاحتمالات التالية $P(X = 1)$ ، $P(X \leq 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \leq 1.5)$

$P(X = 1) = f(1) = 0.48$

$P(X \leq 1) = F(1) = 0.64$

$P(X = 1.5) = f(1.5) = 0$

$P(X \leq 1.5) = F(1.5) = F(1) = 0.64$

التمرين الثالث : لنعرف المتغير العشوائي X المعرف كما في الجدول التالي

Xi القيم الممكنة لها	0	1	2	3	4	المجموع
$f(X) = P(X = Xi)$	0.2	0.1	0.1	0.4	0.2	1

المطلوب :

1- هل يمثل المتغير العشوائي X قانون توزيع احتمالي ؟
2- مثل $f(x)$ بيانيا
3- اوجد قيم كل $E(X)$ ، $V(X)$ ، δ_X
4- أوجد دالة التوزيع $F(x)$

الحل :

- نلاحظ أن القيم التي تأخذها $f(X) = P(X = Xi)$ موجبة و ما عدا هذه القيم فان $f(x) = 0$ وبالتالي الشرط الأول محقق

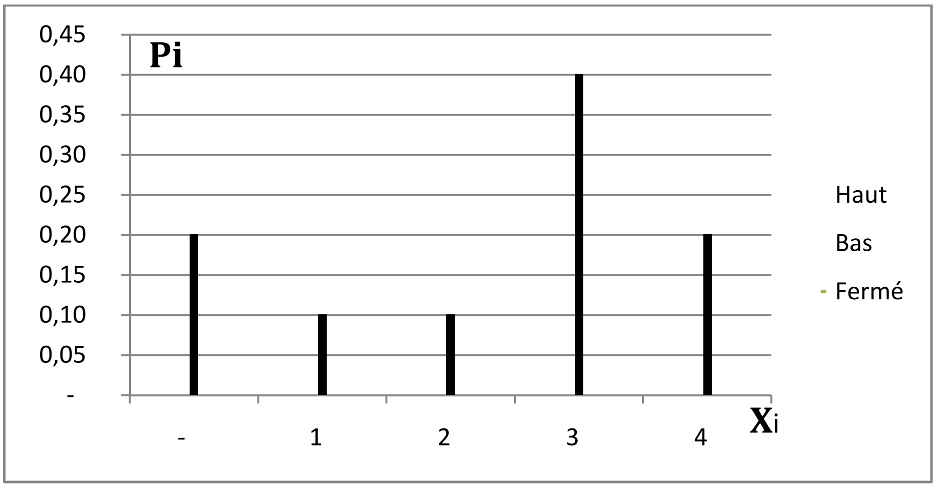
أما الشرط الثاني

$$\sum_{i-1}^{\infty} f(X) = \mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{X_i}) = \sum_{x-1}^{4} \mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{X_i})$$

$$= 0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.4 + 0.2 = 1$$

ومنه الشرط الثاني محقق ومنه المتغير العشوائي يمثل قانون توزع احتمالي

- رسم دالة الاحتمال أو دالة قانون التوزيع الاحتمالي



3- حساب كل من التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعياري

التوقع الرياضي : $\mathbf{E(X)} = \sum_{i-1}^{n} \mathbf{X} \times \mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{X})$

$$\square\ \mathbf{E(X)} = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.2 = 2.3$$

التباين : : $V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$

نحسب أولا العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

$$M_2(X) = \sum_{i=1}^{n} Xi^2 P(X = Xi)$$

$$= 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.1 + 3^2 \times 0.4$$

$$+4^2 \times 0.2 = 7.3$$

ولدينا التوقع الرياضي $\mathbf{E(X)} = \mathbf{2.3}$ ومنه

$$V(X) = 7.3 - (2.3)^2 = 2.01$$

ومنه الانحراف المعيار $\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.01} = 1.41$

4- إيجاد دالة التوزيع

القيم الممكنة لها X_i	0	1	2	3	4	المجموع
$f(X) = P(X = Xi)$	0.2	0.1	0.1	0.4	0.2	1
$\mathcal{F}(X) = P(X \leq X)$	0.2	0.3	0.4	0.8	1	

دالة التوزيع

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.3 & 1 \leq x < 2 \\ 0.4 & 2 \leq x < 3 \\ .0.8 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x < +\infty \end{cases}$$

ثانيا المتغيرة العشوائية المستمرة و مميزاتها العددية :

كثير من التجارب العشوائية لا يمكن التعبير عن نتائجها بمجموعات قابلة للعد كما هو الحال في وزن الأشخاص أو الأطوال أو السن أو الزمن ، ففي هذه الحالة فان قيم المتغيرة العشوائي تأخذ جميع القيم في فترة أو مجال ما [1]

تعريف :المتغيرة العشوائية المستمرة أو المتصلة هي المتغيرة التي يكون المجال المقابل لها غير قابل للعدد ومعرفة علي مجال غير قابل للعد ، ومن أمثلة المتغيرة العشوائية المستمرة نذكر

- أوزان أو أطوال أو سن الطلبة
- كمية الأمطار المتساقطة في مدينة ما
- درجات الحرارة
- الدخل الشهري لمجموعة من الأسر

أ- **دالة الكثافة الاحتمالية**: و تأخذ الشكل التالي

$$\square\ X\ \square\ (a,b)\ \square\ \mathcal{R} \qquad f(x) = \begin{cases} f(x), & x\ \square\ [a\ ,b] \\ 0\ , & x\ \square\ [a\ ,b] \end{cases}$$

وتسمي هذه الدالة بدالة الكثافة الاحتمالية

أو الشكل التالي

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & a \le x \le b \\ 0\ , & \text{فيماعدا ذالك} \end{cases}$$

ملاحظة مهمة : حتى يكون المتغير العشوائي المستمر دالة كثافة احتمالية يجب أن يحقق الشرطين التاليين

الشرط الأول : الدالة موجبة $\quad \mathbf{f(X) \ge 0} \qquad \square\ \mathbf{X}\ \square\ \mathbf{(a,b)}\ \square\ \mathcal{R}$

الشرط الثاني : تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) يساوي الواحد

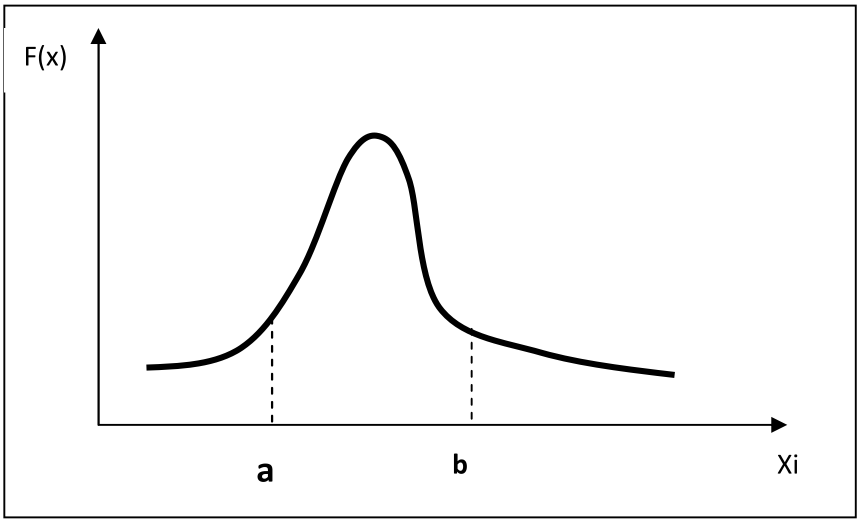
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)d} \ = \int_{a}^{b} \mathbf{f(x)\ d} \ = \mathbf{1}$$

---

[1]- محمد صبحي ابو صالح و عدنان محمد عوض – مقدمة في الاحصاء – ص 146

علما أن $f(x) = \frac{d\,F(x)}{d}$ ، أي أن $\mathbf{f(x)}$ دالة الكثافة الاحتمالية هي مشتقة من دالة التوزيع $F(x)$ ، أي أن $F(x)$ هي الدالة الأصلية $f(x)$

ملاحظة : دالة الكثافة الاحتمالية دائما موجبة و المساحة تحت المنحني تساوي الواحد



مثال: هل الدالة التالية تمثل دالة كثافة احتمالية

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ , & 0 \le x \le 1 \\ 0 \ , & \text{فيماعدا ذالك} \end{cases}$$

حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطان السابقان

الشرط الأول : نلاحظ ان الدالة معرفة على المجال [1 ، 0] حيث تكون موجبة وما عدا هذا المجال تكون الدالة معدومة ومنه $\mathbf{f(X) \ge 0}$ ومنه الشرط الأول محقق

الشرط الثاني: وهو تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) أو المساحة تحت المنحني تساوي الواحد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)d} \ = \int_a^b \mathbf{f(x)\ d} \ = \mathbf{1}$$

تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) يساوي الواحد

$$\int_0^1 \mathbf{f(x)\ d} \ = \int_0^1 2x\ \mathbf{d} \ = 2\int_0^1 x\ \mathbf{d} \ = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{2}{2} = 1$$

ومنه الدالة هي دالة كثافة احتمالية

ب- دالة التوزيع F(x) :

إذا كان X متغير عشوائي مستمر و معطي بدالة كثافة احتمالية f(x) فان دالة التوزيع **F(x)** له تعطي بالعلاقة التالية [1]

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

و هذه الدالة لها نفس خصائص دالة التوزيع في حالة المنقطع و هي هنا هي الدالة **الاصالية** لدالة الكثافة الاحتمالية

$$[F(\dot{x})] = f(x)$$

ملاحظة :

- إذا كان إذا كان X متغير عشوائي مستمر معرف على المجال [a ، b] فان

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b)$$

$$= P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- لدينا P(X=Xi)=0 لأنها دالة مستمرة على المجال[a ، b]

مثال : ليكن لدينا التابع f(x) معرف كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} K\frac{X}{2}, & x \in [0\ ,\ 2] \\ 0\ , & \text{ماعدا ذالك} \end{cases}$$

---

[1]- سعدي الرجال – مرجع سابق –ص 232

المطلوب :

- اوجد قيمة k حتى تكون f(x) دالة كثافة احتمالية ؟
- اوجد دالة التوزيع **F(x)** و مثلها بيانيا
- اوجد قيمة الاحتمال $P(1 < x < 2)$

الحل :

1- حتى تكون دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين

الشرط الأول : نلاحظ ان الدالة معرفة على المجال [2 ، 0] حيث تكون موجبة وما عدا هذا المجال تكون الدالة معدومة ومنه $f(X) \geq 0$ ومنه الشرط الأول محقق

الشرط الثاني: وهو تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) أو المساحة تحت المنحني تساوي الواحد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d = \int_0^2 f(x)\ d = 1$$

تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) يساوي الواحد

$$\int_0^2 f(x)\ d = \int_0^2 K\frac{x}{2}\ d = K\int_0^2 \frac{x}{2}\ d = K\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 =$$

$$= K\left[\frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4}\right] = K\,[1-0] = 1 \ \square\ K = 1$$

ومنه تصبح الدالة f(x)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \ \square\ [0\ ,\ 2] \\ 0\ , & \text{ماعدا ذالك} \end{cases}$$

2-إيجاد دالة التوزع **F(x)** حيث

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

من خلال مجال التعريف للدالة f(x) لدينا المجالات التالية لإيجاد دالة التوزع

المجال الأول : $x \in [-\infty \ , \ 0]$ اي $x < 0$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$$

لان الدالة f(x) في هذا المجال تساوي الصفر اي غير معرفة

المجال الثاني : $x \in [0 \ , \ 2]$ اي $0 \le x \le 2$ يصبح لدينا

$$F(X) = \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

المجال الثالث : $x \in [2 \ , +\infty]$ اي $2 \le x$

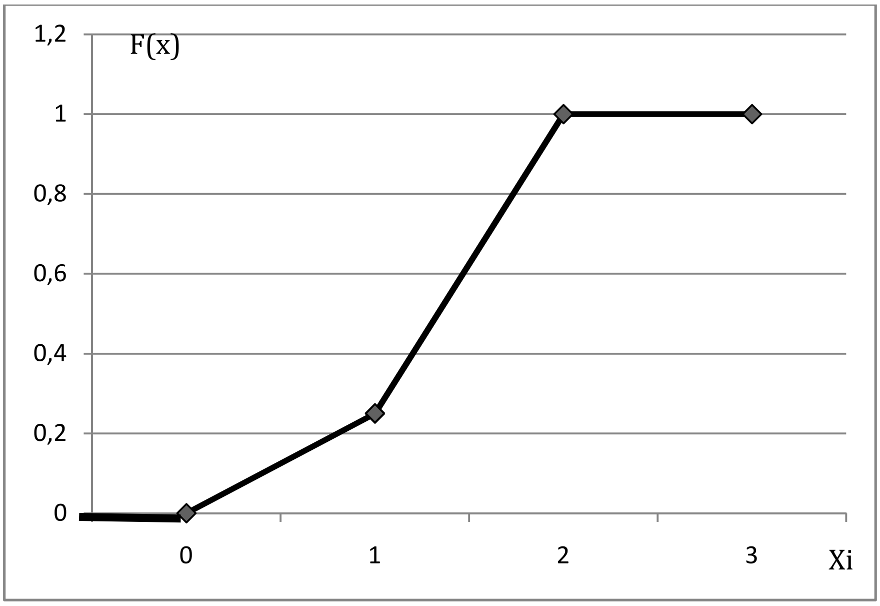
$$F(X) = \int_{2}^{+\infty} f(x)dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_2^{+\infty} = 1$$

لان المساحة تحت منحني دالة الكثافة الاحتمالية (مجموع الاحتمالات) دائما يساوي الواحد

ومنه تكتب دالة التوزع على الشكل التالي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & , \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

أما التمثيل البياني لدالة التوزع



إيجاد قيمة الاحتمال $P(1 < x < 2)$

$$P(1 < x < 2) = \int_{1}^{2} f(x)dx = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.75$$

ج - المميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر :

1- **التوقع الرياضي $E(X)$** : للمتغير العشوائي المستمر ويرمز لها بالرمز **$E(X)$** أو الرمز **$\mu(X)$** و يعطي بالعلاقة التالية

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

- **خواص التوقع الرياضي :**

– $E(C) = C$ حيث C ثابت

– $E(C+X) = C + E(X)$

– $E(CX) = C\,E(X)$

– $E[\,E(X)\,] = E(X)$

2- **التباين V(X):** التباين هو احد مقاييس التشتت و يعبر عن مدى تشتت مختلف القيم حول القيمة المتوسطة أو الوسط و هو عبارة عن العزم المركز الثاني أو من الدرجة الثانية ونميز بين نوعين من العزوم

- **العزوم البسيطة أو الابتدائية:** و يرمز لها بالرمز $M_K(X)$ وتعطي بالعلاقة التالية

$M_K(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx$ حيث K درجة العزم الابتدائي

ومنه إذا كان $K = 0 \Rightarrow M_0(X) = \int_a^b x^0 \cdot f(x)dx = \int_a^b f(x) = 1$

و إذا كان

$$K = 1 \Rightarrow M_1(X) = \int_a^b x^1 \cdot f(x)dx = \int_a^b x \cdot f(x) = E(x)$$

إذا العزم الابتدائي من الدرجة الأولي K=1 هو التوقع الرياضي

- **العزوم المركزية μ :** و هي تكون حول الوسط الحسابي و نرمز لها بالرمز μ_K وتعطي بالعلاقة التالية $\mu_K(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^k \cdot f(x)dx$

لدينا إذا كان : $K = 0 \Rightarrow \mu_0(x) = 1$

- إذا كان :

$$K = 1 \Rightarrow \mu_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^1 \cdot f(x)dx = 0$$

- إذا كان : $K = 2 \Rightarrow \mu_2(x) = M_2(X) - [E(X)]^2 = V(X)$ أي هو التباين

ومنه تعطي علاقة التباين بالعلاقة التالية

$$V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$$

أو العلاقة التالية $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2 \cdot f(x)dx$

حيث $M_2(X)$ هو العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

$$M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f(x)dx$$

- **خواص التباين :**
- $V(C)=0$
- $V(C+X) = V(X)$
- $V(CX) = C^2 V(X)$

3 – الانحراف المعياري $\delta(x)$:

هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين [1] و يرمز له بالرمز $\delta(x)$ ، و يعطي بالعلاقة التالية

$$\delta_x = \sqrt{V(X)}$$

و هو من أكثر المقاييس استخداما ، لأنه يعطي فكرة سليمة عن تشتت الظاهرة المدروسة [2]

تمارين محلولة

تمرين الاول: ليكن لدينا المتغير العشوائي X المعرف بدالة الكثافة الاحتمالية f(x) معرفا كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{\sqrt{x}} & , \quad 0 < x \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{ماعدا ذالك} \end{cases}$$

المطلوب :

- اوجد قيمة C ومثل بيانيا f(x) دالة كثافة احتمالية ؟
- اوجد دالة التوزيع **F(x)** و مثلها بيانيا ؟
- اوجد التوقع الرياضي E(x) و التباين V(x) و الانحراف المعياري δ_x ؟

---

[1] - برنار غريه ، مرجع سابق ، ص 158

[2] - شرف الدين خليل ، مرجع سابق ، ص 63

- اوجد قيمة الاحتمال $P(0 < x \le 2)$ ، $P(x = 2)$ ، $P(x \ge 1)$ ، $P(1 < x \le 4)$

الحل : إيجاد قيمة الثابت C بما أن الدالة دالة كثافة احتمالية فإنها تحقق الشرط الثاني وهو

تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) أو المساحة تحت المنحني تساوي الواحد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)d} = \int_0^4 \mathbf{f(x)\ d} = \mathbf{1}$$

تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) يساوي الواحد

$$\int_0^4 \mathbf{f(x)\ d} = \int_0^4 \frac{C}{\sqrt{x}}\ \mathbf{d} = \mathbf{C}\int_0^4 \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{x}}\ \mathbf{d} = \mathbf{C}\int_0^4 \sqrt{X}^{-1}\ \mathbf{d} =$$

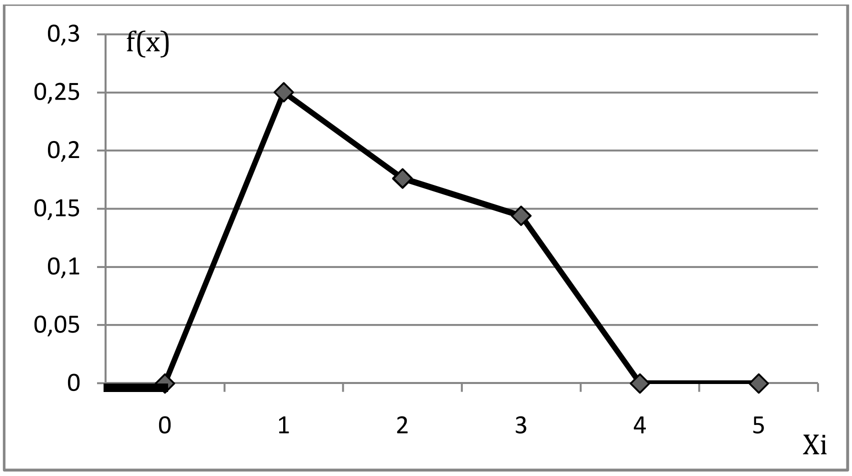
$$= \mathbf{C}\int_0^4 x^{-\frac{1}{2}}\ \mathbf{d} = \mathbf{C}\int_0^4 \frac{\mathbf{1}}{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{1}{2}}\ \mathbf{d} = \mathbf{C}\left[2\sqrt{x}\right]_0^4 = \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{C}\left[2\sqrt{4} - 2\sqrt{0}\right] = \mathbf{C}\ [4] = \mathbf{1}\ \square\ \mathbf{C} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

ومنه تصبح الدالة f(x)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}} & , \quad 0 < x \le 4 \\ 0 & , \quad \text{ماعدا ذالك} \end{cases}$$

أما التمثيل البياني لدالة f(x) دالة كثافة احتمالية



1- إيجاد دالة التوزع F(x) حيث

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

من خلال مجال التعريف للدالة f(x) لدينا المجالات التالية لإيجاد دالة التوزع

المجال الأول : $x \in [-\infty \; , \; 0]$ اي $x < 0$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$$

لان الدالة f(x) في هذا المجال تساوي الصفر اي غير معرفة

المجال الثاني : $x \in]0 \; , \; 4]$ اي $0 \le x \le 4$ يصبح لدينا

$$F(X) = \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \; = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{x}\right]_{0}^{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

المجال الثالث : $x \in [4 \; , +\infty]$ اي $4 \le x$

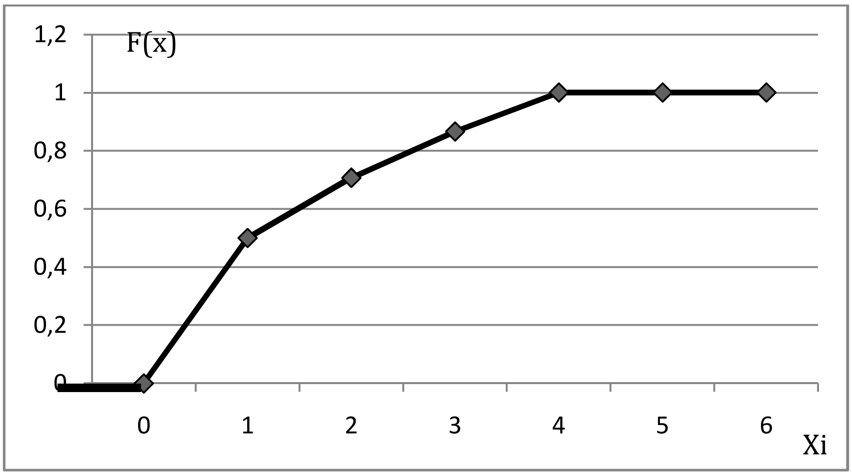
$$F(X) = \int_{4}^{+\infty} f(x)dx = \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \; 1$$

لان المساحة تحت منحني دالة الكثافة الاحتمالية (مجموع الاحتمالات) دائما يساوي الواحد

ومنه تكتب دالة التوزع على الشكل التالي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & , \quad 0 \le x \le 4 \\ 1 & , \quad 4 \le x \end{cases}$$

أما التمثيل البياني لدالة التوزع



2- إيجاد التوقع الرياضي $E(x)$ و التباين $V(x)$ و الانحراف المعياري δ_x

- **التوقع الرياضي** $E(x)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{4} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{4} x \cdot \frac{1}{4\sqrt{x}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{4} \frac{x}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{4} x \cdot x^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{4} x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - 0\right]_{0}^{4} = 1.33$$

- **التباين** $\mathbf{V(x)}$ تعطي علاقة التباين بالعلاقة التالية

$$V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$$

حيث هو $M_2(X)$ العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

$$M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^4 x^2 \times \frac{1}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^4 X^2 \times X^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{4}\int_0^4 X^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{5} \times X^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

ولدينا $E(X) = 1.33$ ومنه التباين

$$V(X) = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{5} \times X^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 - (1.33)^2 = 1.43$$

الانحراف المعيار $\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.43} = 1.2$

3- حساب قيم الاحتمال التالية $P(0 < x \leq 2)$ ، $P(x = 2)$ ، $P(x \geq 1)$ ، $P(1 < x \leq 4)$

$$P(0 < x \leq 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$P(X = 2) = 0$ لان الدالة مستمرة و المساحة تحت النقطة تساوي الصفر

$$P(x \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$$

$$P(1 < x \leq 4) = F(4) - F(1) = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني: ليكن لدينا دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X معرفة على النحو التالي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ax^2 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

المطلوب :

1- إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ ؟

2- حساب الثابت a ؟

3- إيجاد قيمة الاحتمال المحصور بين 0.25 و 0.50

الحل :

1– لإيجاد دالة الكثافة الاحتمالية نقوم باشتقاق دالة التوزع لأنها الدالة الأصلية لدالة الكثافة الاحتمالية أي $[F(\acute{x})] = f(x)$

إذ كان $x \le 0$ فان $[F(\acute{x})] = 0$

إذا كان $0 < x \le 1$ فان $[F(\acute{x})] = 2$

إذا كان $x > 1$ فان $[F(\acute{x})] = 0$

ومنه تصبح دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} 2ax & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

2- حساب الثابت a ، بما أن الدالة دالة كثافة احتمالية فإنها تحقق الشرط الثاني وهو تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) أو المساحة تحت المنحني تساوي الواحد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d = \int_0^1 f(x)\ d = 1$$

تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) يساوي الواحد

$$\int_0^1 f(x)\ d = \int_0^1 2ax\ d = 2 \int_0^1 2a\ d = 2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 2\ \left[\frac{1}{2}\right] = 1\ \square\ a = 1$$

ومنه تصبح الدالة الكثافة الاحتمالية f(x)

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

4- حساب قيمة الاحتمال المحصور بين 0.25 و 0.50

$$P(0.2 < x < 0.50) = \int_{0.2}^{0.5} f(x)d = F(0.5) - F(0.2)$$
$$= (0.5)^2 - (0.2)^2 = 0.1$$

التمرين الثالث : ليكن لدينا المتغير العشوائي X المعرف بدالة الكثافة الاحتمالية f(x) معرفا كما يلي

$$f(x) = k(2x^2 + 3x + 1) \quad x \in [0, 3]$$

المطلوب : اوجد قيمة الثابت k ؟

- اوجد دالة التوزيع **F(x)** ؟
- اوجد التوقع الرياضي$E(x)$ و التباين $V(x)$ و الانحراف المعياري δ_x ؟
- اوجد قيمة الاحتمال $P(1 < x \leq 2)$

الحل :

1- إيجاد قيمة الثابت k بما ان الدالة دالة كثافة احتمالية فإنها تحقق الشرط الثاني وهو تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) أو المساحة تحت المنحني تساوي الواحد

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d = \int_0^3 f(x)\ d = 1$ ومنه نحسب التكامل

يصبح

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^3 f(x)\ dx = 1$$

$$\Rightarrow k\int_0^3 (2x^2 + 3x + 1)\, dx = k\int_0^3 2x^2\, dx + \int_0^3 3x\, dx + \int_0^3 1\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad k\left[2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + x\right]_0^3 = 1$$

$$\Rightarrow k\left[2\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} + 3 - 0\right] = 1 \Rightarrow k\left[\frac{207}{6}\right] = 1 \Rightarrow$$

$$k = \frac{6}{2} \Rightarrow k = \frac{2}{6}$$

2- إيجاد دالة التوزع F(x) حيث

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

من خلال مجال التعريف للدالة f(x) لدينا المجالات التالية لإيجاد دالة التوزع

المجال الأول : $[0 , \infty-]$ x اي $x < 0$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$$

لان الدالة f(x) في هذا المجال تساوي الصفر اي غير معرفة

المجال الثاني : $[0 , 3]$ x اي $0 \leq x \leq 4$ يصبح لدينا

$$F(X) = \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{2}{69}\left((2x^2 + 3x + 1)\right) dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{69}\left(\int_{0}^{x} 2x^2\, dx + \int_{0}^{x} 3x\, dx + \int_{0}^{x} 1\, dx\right) = \frac{2}{69}\left(2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + x\right)$$

المجال الثالث : $[3 , +\infty[$ x اي $4 \leq x$

$$F(X) = \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = \int_{3}^{+\infty} \frac{2}{69}\left((2x^2 + 3x + 1)\right) dx = 1$$

لان المساحة تحت منحني دالة الكثافة الاحتمالية (مجموع الاحتمالات) دائما يساوي الواحد

ومنه تكتب دالة التوزع على الشكل التالي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{2}{69}\left(2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + x\right) & , \quad 0 \le x \le 3 \\ 1 & , \quad 3 \le x \end{cases}$$

3- إيجاد كل من التوقع الرياضي $E(x)$ و التباين $V(x)$ و الانحراف المعياري δ_x

- **التوقع الرياضي** $E(x)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^3 x \cdot f(x)dx$$

$$= \int_0^3 x \cdot \frac{2}{69}(2x^2 + 3x + 1)dx$$

$$= \frac{2}{69}\int_0^3 (2x^3 + 3x^2 + x)dx = \frac{2}{69}\left[2\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \frac{2}{69}\left[2\frac{3^4}{4} + 3\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} - 0\right]_0^3 = \frac{144}{69} = 2.086$$

- **التباين** $V(x)$ تعطي علاقة التباين بالعلاقة التالية

$$V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$$

حيث $M_2(X)$ هو العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

$$M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{2}{69}(2x^2 + 3x + 1)dx \Rightarrow$$

$$\frac{2}{69}\int_0^3 (2x^4 + 3x^3 + x^2)dx \Rightarrow = \frac{2}{69}\left[2\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{2}{69}\left(2\frac{3^5}{5} + 3\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} - 0\right) = 4.839$$

ولدينا $E(X) = 2.086$ ومنه التباين

$$V(X) = 4.839 - (2.086)^2 = 0.487$$

الانحراف المعياري $\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.487} = 0.697$

4- إيجاد قيمة الاحتمال $P(1 < x \leq 2)$

$$\mathbf{P(1 < x < 2) = \int_{1}^{2} f(x)d = F(2) - F(1) = 0.2}$$

التمرين الرابع :

لتكن لدينا دالة الكثافة الاحتمالية f(x) معرفا كما يلي

$$f(x) = 1 - |1 - x| \qquad x \in [0\ ,2]$$

المطلوب :

- برهن أن f(x) دالة كثافة احتمالية ثم مثلها بيانيا ؟
- اوجد دالة التوزيع **F(x)** ؟
- اوجد التوقع الرياضي E(x) و التباين V(x) و الانحراف المعياري δ_x ؟
- اوجد قيمة الاحتمال $P\left(\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}\right)$

الحل : لدينا من خلال مجال تعريف الدالة f(x)

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & ; \quad x \leq 1 \\ x - 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

ومنه تصبح الدالة f(x)

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x < 01 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \quad x \notin [0\ ,1] \end{cases}$$

و حتى تكون دالة كثافة احتمالية يجب أن تحقق الشرطين

الشرط الأول : نلاحظ ان الدالة موجبة على مجال تعريفها وما عدا هذا المجال تكون الدالة معدومة ومنه $\mathbf{f(X) \geq 0}$ ومنه الشرط الأول محقق

الشرط الثاني: وهو تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) أو المساحة تحت المنحني تساوي الواحد $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(x)d} = \mathbf{1}$

تكامل الدالة (مجموع الاحتمالات) يساوي الواحد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d = \int_{0}^{1} x\, d + \int_{1}^{2} 2 - x\, d = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ومنه الدالة f(x) دالة كثافة احتمالية

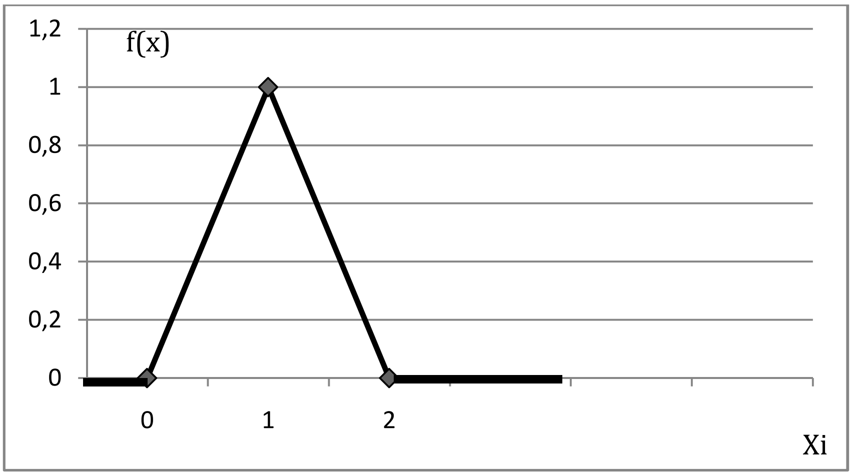
التمثيل البياني لدينا

$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$$

$$x = 1 \Longrightarrow f(1) = 1$$

$$x = 2 \Longrightarrow f(2) = 0$$

ومنه التمثيل البياني للدالة هو



2-إيجاد دالة التوزيع **F(x)** من خلال مجال التعريف لدينا المجالات التالية

- إذا كان $x \le 0 \Longrightarrow F(x) = 0$
- إذا كان $0 \le x \le 1$ لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d = \int_{0}^{x} x\,d = \frac{x^2}{2}$$

- إذا كان $1 \le x \le 2$ لدينا

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d = \int_{1}^{x} 2 - x\,d = 2x - \frac{x^2}{2}$$

- إذا كان $x > 2 \Longrightarrow F(x) = 1$

ومنه دالة التوزيع تصبح

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} & , \quad 0 \le x < 01 \\ 2x - \frac{x^2}{2} & , \quad 1 \le x \le 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

3- إيجاد التوقع الرياضي$E(x)$ و التباين $V(x)$و الانحراف المعياريδ_x

1- **التوقع الرياضي**$E(x)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{1} x^2dx + \int_{1}^{2} 2x - x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{2} - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 0.66$$

2- **التباين** $V(x)$ تعطى علاقة التباين بالعلاقة التالية

$$V(X) = M_2(X) - [E(X)]^2$$

حيث $M_2(X)$هو العزم الابتدائي من الدرجة الثانية

$$M_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f(x)dx = \int_0^1 x^3dx + \int_1^2 2x^2 - x^3 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 1.17$$

ولدينا $E(X) = 0.66$ ومنه التباين

$$V(X) = 1.17 - (0.66)^2 = 0.73$$

الانحراف المعيار $\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.73} = 0.85$

3- إيجاد قيمة الاحتمال $P\left(\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}\right)$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)d = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\, d + \int_1^{\frac{3}{2}} 2 - x \, d = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$$

تمارين مقترحة للحل

التمرين الأول : لتكن التجربة E متعلقة برمي قطعة نرد مرتين ، ولنعرف المتغير العشوائي X هو عبارة عن مجموع النتيجتين المتحصل عليهما

المطلوب :

- قدم التوزيع الاحتمالي ل X و مثله بيانيا
- اوجد دالة التوزيع ومثلها بيانيا
- احسب $F(1)$ ، $F(4)$ ، $P(X\leq 0)$ ، $P(x\geq 12)$ ، $P(0<x<10)$

التمرين الثاني :لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل ضعف العدد الذي يظهر عند رمي زهرة نرد مرة واحدة

المطلوب : اوجد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X وكذا دالة التوزيع ثم مثلها بيانيا

التمرين الثالث : نطلق ثلاث طلقات على هدف معين ، فإذا كان احتمال إصابة الهدف لكل طلقة هو 0.4 ، وإذا عرفنا المتغير العشوائي X يمثل عدد إصابات الهدف

المطلوب :

- وضع جدول قانون التوزيع الاحتمالي وكذلك دالة التوزيع لهذه التجربة العشوائية
- احسب التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعيار

التمرين الرابع : ليكن لدينا التوزيع الاحتمالي و المتعلق بالمتغير العشوائي X

- إذا علمت أن X هو قانون توزيع احتمالي اوجد P_1 ، P_3 ، علما أن العزم الابتدائي من الدرجة الثانية هو $M_2(x)=1.5$
- اوجد دالة التوزيع $F(X)$

X	0	1	2
$P(X=X_i)$	P_1	1/2	P_3

التمرين الخامس : ليكن لدينا الجدول التالي

Xi	0	1	2	3	4
P(X=Xi)	0.20	0.25	0.05	0.35	0.15

المطلوب :

- هل Xi هو قانون توزيع احتمالي ؟
- احسب E(X) ، V(X) ، δ_X
- أوجد دالة التوزيع F(x)

التمرين السادس : لتكن لديك الدالة التالية

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , s : 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1) اثبت أن الدالة $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية
2) اوجد دالة التوزيع $F(x)$
3) اوجد قيمة الاحتمال التالي $p\ (\ 0 \le x \le \frac{1}{2})$
4) اوجد قيمة التوقع الرياضي و التباين (X) E، $V(X)$

التمرين السابع: لتكن x متغيرة عشوائية مستمرة معرفة بالدالة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , s : 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1) اثبت أن الدالة $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية ، ومثلها بيانيا
2) اوجد دالة التوزيع $F(x)$ ، ومثلها بيانيا
3) اوجد قيمة الاحتمال التالي $p\ (\ 2 \le x \le 2.5\ )$
4) اوجد قيمة التوقع الرياضي و التباين (X) E، $V(X)$

التمرين الثامن: ليكن لديك الدالة التالية

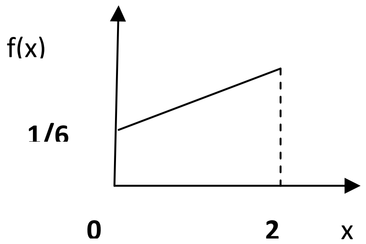
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , s : 1 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

1) اوجد قيمة الثابت c حتى تكون الدالة دالة كثافة احتمالية
2) ارسم دالة الكثافة الاحتمالية
3) اوجد قيمة الاحتمال $p\ (1 \leq x \leq 3)$
4) احسب التوقع الرياضي و التباين

التمرين التاسع: ليكن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية، مجال تعرفها مبين في الشكل التالي:

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية ومجال تعرفها؟
2- أوجد دالة التوزع ومثلها بيانيا؟
3- أحسب التوقع الرياضي والتباين؟



الفصل الثالث قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة

أولا قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرة العشوائية المتقطعة

- **أ** – توزيع برنولي
- **ب** – التوزيع الثنائي **(** توزيع ذو حدين **)**
- ج- توزيع بواسون :
- د التوزيع الهندسي :
- **ق** – التوزيع فوق الهندسي :
- ك التوزيع المنتظم

ثانيا قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات العشوائية المستمرة

- **أ** – التوزيع المنتظم :
- ب- التوزيع (**القانون**) **الآسي**
- ج-التوزيع الطبيعي
- د- التوزيع الطبيعي المعياري :
- **ك**- توزيع كي مربع
- د- توزيع ستودنت
- **ط** - توزيع فيشر

الفصل الثالث : قوانين التوزيعات الاحتمالية المنقطعة والمستمرة

تمهيد : تطرقنا في الفصل السابق إلي مفهوم المتغيرات العشوائية المنفصلة و المستمرة ، و سينصب اهتمامنا في هذا الفصل علي عدد من التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستعمال و الاستخدام في التطبيقات الإحصائية المتعددة الأغراض و التي تهم متخذي القرار سواء كان إداري او اقتصادي أو سياسي ، إلا انه لا يمكن التطرق إلي جميعها و إنما سنتناول بعض منها والتي هي كثيرة الاستعمال في الحياة العملية

أولا : قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرة العشوائية المنقطعة:

ومن بين ابرز التوزيعات المنقطعة التي سنتطرق إليها نذكر : توزع برنولي ، توزع الثنائي ، توزع بواسون ، التوزع ما فوق الهندسي ، التوزع الهندسي [1]

أ – **توزيع برنولي** يسمي هذا التوزع باسم مكتشفه جيمس برنولي في نهاية القرن17 للميلاد ، ويعد توزيعه الأساس لبناء التوزيع الثنائي ، وتعرف تجربة برنولي بأنها تجربة تكون نتيجتها أما نجاح وتحدث باحتمال P أو الفشل وتحدث باحتمال (q=1-P) [2]

إن المتغير العشوائي (X) لتجربة برنولي يأخذ قيمتين فقط هما (0 , 1) حيث 1 تمثل حالة النجاح ، و 0 تمثل حالة الفشل ، و نكتب $\mathbf{X \sim B(1, p)}$

- **أمثلة علي تجارب برنولي** : مراقبة جودة الإنتاج الصناعي الوحدة المختارة إما إن تكون مطابقة للمواصفات(نجاح) او غير مطابقة(فشل) ، أو تدقيق مجموعة من المستندات (صحيحة أو غير صحيحة)
- **الصيغة العامة لتوزيع برنولي** : تعطى الصيغة العامة لتوزيع برنولي علي النحو التالي

$$P(x=x)=\begin{cases} P^{x}(1-P)^{1-x} & x=0\ ,\ 1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث $q=1-p$ ، و $p(x=1)=p$ و $p(x=0)=q$

---

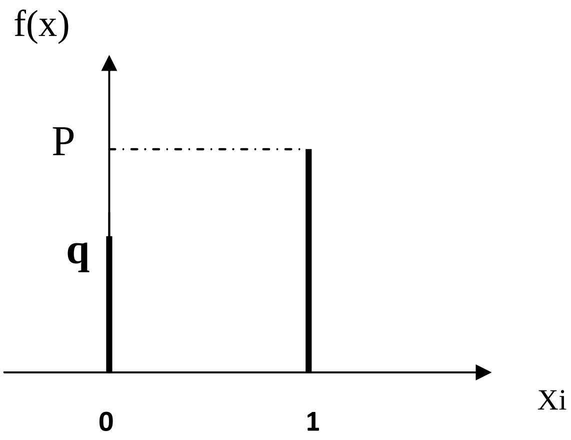
[1] - شفيق العتوم - مرجع سابق –ص 271

[2] - حسن ياسين طعمة إيمان حسين حنوش – مرجع سابق – ص 78

و الجدول التالي يلخص هذا التوزع

Xi	0	1
Pi	q=1-P	p

أما تمثيلها البياني



خصائص توزع برنولي: يتميز هذا التوزع بمجموعة من الخصائص [1] حيث أن أي تجرة عشوائية تحقق الشروط التالية تسمي تجرة برنولي :

- لكل محاولة نتيجتين فقط إما نجاح أو فشل
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة المحاولة الأخرى
- احتمال النجاح ثابت وكذلك احتمال الفشل p ، q=1-P
- إن دالة التوزع الاحتمالي لتجرة برنولي تدعي بدالة الكثافة الاحتمالية و تتميز بالخصائص التالية

- أنها دالة وحيدة القيمة يمعني ان لكل قيمة من قيم المتغير (x) هناك قيمة واحدة فقط للدالة $f(x=x_i)$
- أنها دالة موجبة و تتراوح قيمتها بين الصفر و الواحد $0 \leq p(x = x) \leq 1$
- أن مجموع القيم الاحتمالية p(x=xi) المقابلة للمتغيرة (x) تساوي الصفر

$$\sum_{x-1}^{1} p^x \ (1-p)^{1-x} = 1$$

المميزات العددية لتوزع برنولي :

[1]- بوعظم كمال - الاحصاء الاستدلالي – مرجع سابق – ص 62

- **التوقع الرياضي** : $E(X) = \Sigma\ xi.pi = 1.p + 0.q = p \Rightarrow E(X) = p.$
- **التباين**: لدينا $V(x) = M_2(x) - (E(x))^2$

$$M_2(x) = 0^2.q + p.\ 1^2 = p$$

و منه $V(x) = p - p^2 = p.(1-p) = p.q \quad \square\ V(x) = p$

- **الانحراف المعياري** : $\delta_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{p}$

مثال : عند رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية وعرفنا المتغير العشوائي (x) يتمثل في ظهور الصورة F ، فالمطلوب إيجاد دالة التوزع الاحتمالي للمتغير (x) مع رسم دالة الاحتمال ، ثم حساب التوقع الرياضي و التباين ؟

الحل :

$$P(x = x) = \begin{cases} P^x(1-P)^{1-x} & x = 0\ ,\ 1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

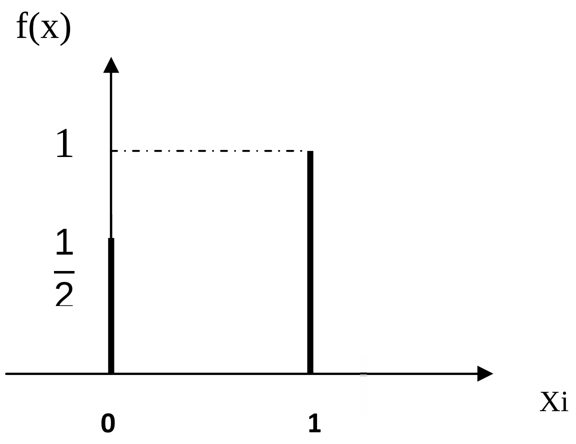
لدينا $\Omega = \{F, P\}$ و $card\ \Omega = 2$ ، $P(P) = \frac{1}{2}$ ، $P(F) = \frac{1}{2}$

ومنه

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x\ (\frac{1}{2})^{1-x} & x = 0\ ,\ 1 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

Xi	0	1
P(x=xi)	1/2	1/2

التمثيل البياني :



حساب المميزات ال

$E(X) = \Sigma \; xi.pi = 0 \; . \frac{1}{2} \; + 1 \; . \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad => E(X) = \frac{1}{2}$

- **التباين:** لدينا $V(x) = M_2(x) - (E(x))^2$

$$M_2(x) = 0^2 . q + p \, . \; 1^2 = p$$

$$M_2(x) = 0^2 . \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \, . \; 1^2 = \frac{1}{2}$$

و منه $V(x) = \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} \; \square \; V(x) = \frac{1}{4}$

- **الانحراف المعياري** : $\delta_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

ب – التوزيع الثنائي (توزع ذو حدين) :

عند تكرار تجربة برنولي عدد ثابتا من المحاولات المستقلة و ليكن n مرة فإننا في هذه الحالة نحصل في كل مرة إما علي حالة نجاح باحتمال P او حالة فشل باحتمال (q=1-P) وعليه فان المتغير العشوائي (x) الذي يمثل عدد مرات النجاح لهذا النوع من التجارب يقال له توزع ذي حدين أو التوزع الثنائي [1] ، وتعطي دالة التوزع الاحتمالي له بالشكل التالي

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} C_n^x \; p^x \; (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,3,\ldots\ldots n \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

ملاحظة: عندما يكون عدد المحاولات n=1 فان التوزع يصبح توزع برنولي

ويرمز لهذا التوزع بالشكل التالي $x \sim b(n\,,p)$

إن دالة التوزع الاحتمالي لتوزع ذي حدين هي عبارة عن الحد العام لمفكوك ثنائي الحدين $[(p+q)^n]$ (ثنائي حد نيوتن) و من هنا جاءت تسمية هذا التوزع ، ويطلق علي كل من $(n\,,p)$ بمعلمات التوزع $x \sim b(n\,,p)$

متى يستعمل هذا التوزيع[2] ؟ يستعمل عندما تتوفر الشروط التالية :

1- احمد علي الزغول – مقدمة في الاحتمالات و تطبيقاتها- دار الفرقان للنشر و التوزيع – عمان الأردن – ط1999 ص 127

2- مساوي عبد النور- مرجع سابق – ص 79

- تؤول كل محاولة إلي نتيجة واحدة من بين النتيجتين إما نجاح أو فشل
- تعاد التجربة في نفس الظروف عدد n من المرات و يتحقق من خلالها حدث معين عدد K من المرات حيث $(0 \leq K \leq n)$
- إن نتيجة كل محاولة تعد مستقلة عن نتيجة المحاولات الأخرى
- إن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات P و كذلك الفشل q
- لدينا ظاهرة عشوائية ممثلة بالمتغير العشوائي (x) و التي تخضع للقانون الثنائي حيث أعيدت التجربة عدد n من المرات و تحقق من خلالها مثلا الحادث A عدد K من المرات ، وبالتالي فانه عدد تحقق A هو (n - k) من المرات و احتمال ذلك يساوي $p^k \,.\, q^{m-k}$
- يمكن للحدث A ان يتحقق عدد K من المرات واكن بإشكال مختلفة و عدد هذه الأخيرة هو عبارة عن عدد التوفيقات لعدد K من العناصر المأخوذة من عناصر عددهاn التي يمكن تشكيلها اي C_n^k

$$f(x) = P(x = x) = C_n^k \ p^k \ (1 - p)^{n-k}$$

- **أهم استخدامات القانون الثنائي** [1]:
- اختيار الجودة (موافق أو غير موافق للمواصفات)
- نتيجة رمي عملة معدنية (صورة أو كتابة)
- دراسة السوق
- إسقاط طائرة أو عدم إسقاطها ، أو إصابة هدف معين أو عدم إصابته
- التدخين للطلبة (يدخن أو لا)
- نتيجة الامتحان نجاح أو رسوب
- **المميزات العددية له** : علي أساس أن القانون الثنائي هو عبارة عن جمع عدد n من المتغيرات لبرنولي يمكن حساب التوقع الرياضي و التباين له كما يلي :
- **التوقع الرياضي E(x) :**

[1]- حسن ياسين طعمة – مرجع سابق –ص 82

$E(X) = E(X1 + X2 + \ldots Xi + \ldots + Xn) = \Sigma E(Xi) = \Sigma pi = n\, p \Rightarrow$
$\mathbf{E(X) = np}$

التباين V(X) : $V(X) = V(X1 + X2 + \ldots Xi + \ldots + Xn)$,
$V(X) = \Sigma V(Xi) = \Sigma pq \Rightarrow \quad \mathbf{V(X) = npq}$

- **الانحراف المعياري :** $\delta_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{n}$

مثال: عند رمي قطعة نقدية متجانسة خمسة مرات متتالية وكان المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الصور F التي تظهر : **المطلوب**

- كتابة دالة التوزع للمتغير العشوائي
- إيجاد احتمال ظهور أرعة صور
- حساب قيمة الاحتمال $p(1 \le x \le 3)$
- اوجد المميزات العددية لهذه التجرة

الحل : لدينا $x \sim b(n, p)$, n=5 , p=½

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} C_5^x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- إيجاد احتمال ظهور أرعة صور

$$f(4) = P(x = 4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{32}$$

- حساب قيمة الاحتمال $p(1 \le x \le 3)$

$$p(1 \le x \le 3) = p(x = 2) + p(x = 3)$$

$$= C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} + C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{10}{16}$$

المميزات العددية:

- **التوقع الرياضي E(x) :**

$$E(X) = np = 5 \ . \ 0.5 = 2.5$$

التباين V(X) :

$$V(X) = npq = 5 \ . (0.5) \ . (0.5) = 1.25$$

الانحراف المعياري : $\delta_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1.2} = 1.1$

ج- توزيع بواسون : $x \sim P(\lambda)$

إذا كان التوزيع الثنائي يستعمل لإيجاد احتمال عدد معين من النجاحات من بين عدد n من المحاولات ، فان توزيع بواسون يستعمل لإيجاد نفس الاحتمال و لكن في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة ، أن الوحدة الزمنية قد تكون ثانية أو دقيقة أو ساعة أو أسبوع او شهر ...الخ ، أما المكان فأما أن يكون صفحة من كتاب أو قسم من الأقسام

إن الشروط المطلوبة لتطبيق القانون الثنائي تبقي سارية المفعول عند استعمال قانون بواسون

- تؤول كل محاولة الي نتيجة واحدة من بين نتيجتين متنافيتين
- إذا افترضنا وجود عدة فترات زمنية منفصلة عن بعضها البعض فان حدوث النجاحات في أي فترة مستقلة عن حدوث النجاحات في فترة أخرى
- عدد النجاحات في وحدة من الزمن يبقي ثابت
- معدل النجاحات (λ) التي تحدث في فترة زمنية معينة معلوم و يكون صغير جدا يؤول الي ما لانهاية ، كذلك عدد التجارب التي يتم إجرائها يكون كبير جدا تؤول إلي ما لانهاية [1]

- **صيغة قانون بواسون :**ان دالة احتمال توزيع لابواسون تعطي بالصيغة التالية [2]

$$f(x) = P(x = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad , (x = 0 ,1 ,2, \dots)$$

حيث **e** :هو الأساس اللوغارتمي الطبيعي النبير e = 2.718

1- بوعظم كمال – الإحصاء الاستدلالي – مرجع سابق - ص 67

2- موراي شبيجل – الإحصاء –سلسلة شوم – ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان – الدار الدولية للاستثمارات الثقافية – الطبعة السابعة – 2004- مصر –ص 198

λ: معدل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة معينة و تكون موجبة دائما $\lambda > 0$

P(x=xi) : هو احتمال ظهور (x) حادث في مجال معين (تكرار الحادث (x) مرة في فترة زمنية معينة) و نرمز لهذا التوزيع اختصارا $x \sim P(\lambda)$

- **خواص قانون بواسون :**

الخاصية الأولي : $\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \geq 0 \quad \forall x \in N$

الخاصية الثانية : $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$

- **المميزات العددية :**
- **التوقع الرياضي E(x) :** $E(X) = \lambda$
- **التباين V(X) :** $V(X) = \lambda$
- **الانحراف المعياري :** $\delta_{(x)} = \sqrt{\lambda}$

استخدامات توزيع بواسون : يستخدم في الحالات التالية

- عدد الزائرين الذين يدخلون إلي دائرة حكومية مثلا خلال فترة زمنية معينة
- عدد الكوارث أو الوفيات أو الوفيات الراجعة لأمراض نادرة خلال فترة زمنية
- عدد الركاب الذين يصلون إلي محطة القطار خلال وحدة زمنية معينة
- عدد المكالمات الهاتفية خلال وحدة زمنية معينة

مثال : إذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية التي تحدث علي الطرق الخارجية هو حادث واحد ، المطلوب :

- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي ل (x)
- ما هو احتمال وقوع حادثين في يوما ما

الحل : من خلال المعطيات نلاحظ أن هذا التوزيع يتبع توزيع بواسون فهو متعلق بالزمن

حيث $x \sim P(1)$ ، $\lambda = 1$

ومنه دالة التوزيع

$$f(x) = P(x = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{1^x e^{-1}}{x!} \quad , (x = 0 ,1 ,2, \dots)$$

- احتمال وقوع حادثين في يوما ما $P (x =2)$

$$f(2) = P(x = 2) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{0.3}{2} = 0.184$$

لدينا من جدول توزيع بواسون [1] $e^{-1} = 0.368$

- **العلاقة بين توزيع ذي حدين و توزيع بواسون :**

يعد توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذي حدين و مشتق منه حيث عندما يكون احتمال النجاح p صغير جدا و يقترب من الصفر ، وكان عدد المحاولات n كبير جدا و يؤول إلي ما لانهاية ، مما يجعل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي حدين صعب و يمكن حسابه بواسطة توزيع بواسون حيث $\lambda = n . p$ معتدل القيمة [2]

د التوزيع الهندسي : $x \sim G(P)$

يقال إن المتغير العشوائي (x) له توزيع هندسي إذا كانت هناك مجموعة من تجارب برنولي بمعني أن كل تجربة لها نتيجة نجاح p او فشل q=1-p كما أن احتمال النجاح ثابت من تجربة إلي أخرى و كل تجربة مستقلة عن التجارب الأخرى و المتغير العشوائي (x) هو عبارة عن عدد التجارب اللازمة للحصول علي اول نجاح ، بمعني ان عدد التجارب غير محدد من البداية كتوزيع ذي الحدين [3] ، وعلي هذا الأساس فان المتغير العشوائي المنفصل ل (x) في حالة التوزيع الهندسي هي عبارة عن عدد محاولات إجراء التجربة دون توقف حتي يتم الحصول علي اول نجاح ، وبذلك فان أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة (x) تسبقه عدد من المحاولات الفاشلة و قدرها (x-1) ، و بافتراض انه لدينا متغير عشوائي منفصل x يمثل عدد

1- اظر في ذلك الملحق في أخرى الطبوعة

2- محمد صبحي ابو صالح و عدنان محمد عوض – مقدمةفي الاحصاء – مرجع سابق – ص 145

3- شفيق العتوم – مرجع سابق –ص 287

المحاولات الأزمة للحصول علي أول نجاح نقول أن هذا التوزع يتبع التوزع الهندسي و تعطي دالة توزيعه الاحتمالية كما يلي[1]:

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} P \ (1 - P)^{x-1} & x = 1,2,3, \dots \infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

ويعبر عنه باختصار ا $x \sim G(P)$

- **المميزات العددية للتوزيع الهندسي:**
- **التوقع الرياضي $E(x)$:** $E(X) = \frac{1}{P}$
- **التباين $V(X)$:** $V(X) = = \frac{q}{P^2}$
- **الانحراف المعياري :** $\delta_{(x)} = \frac{\sqrt{q}}{P}$

مثال : رميت زهرة نرد متجانسة في تجربة عشوائية عدة مرات حتى يتم الحصول علي احد الأوجه المطلوب : كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير **x**

- ما هو احتمال أن تحتاج إلي أربعة محاولات علي الأقل حتى تحصل علي العدد 5 علي وجه زهرة النرد
- كم هو معدل (توقع) عدد المحاولات التي تحتاجها وتباين ذلك؟

الحل : بما أن احتمال الحصول علي احد الوجوه الست في الرمية الواحدة ثابت فان

$P = \frac{1}{6}$ ومنه التوزع يتبع التوزع الهندسي $x \sim G(\frac{1}{6})$

ومنه دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير **(x)**

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \ (1 - \frac{1}{6})^{x-1} & x = 1,2,3, \dots \infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

احتمال أن تحتاج إلي أربعة محاولات علي الأقل حتى تحصل علي العدد 5 علي وجه زهرة النرد

---

[1]- حسن ياسين طعمة و ايمان حسين حنوش – مرجع سابق – ص 96

$$P(x \geq 4) = 1 - P(x < 4)$$
$$= 1 - [p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3)]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{1-1} + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2-1} + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1}\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{6} + \frac{5}{3} + \frac{2}{2}\right] = 1 - \frac{9}{2} = 0.5$$

- معدل (توقع) عدد المحاولات التي تحتاجها وتباين ذلك

– التوقع الرياضي $E(x)$: $E(X) = = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

– التباين $V(X)$: $V(X) = = = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} = 3$

ق – التوزيع فوق الهندسي : $x \sim H(N_1 , N - N_1)$

تعد تجارب التوزع فوق الهندسي من التجارب المتكررة غير المستقلة ، و هي من التجارب المبنية على أساس السحب بدون إرجاع مما يجعل احتمال الحصول على صفة معينة غير ثابت لان الاحتمال يتغير من محاولة إلى أخرى على عكس تجارب برنولي وتوزع ذي حدين التي يكون فيها الاحتمال ثابت و السحب يتم بالإرجاع [1]

ليكن مثلا لدينا مجتمع يحتوي على N من العناصر فيه N_1 لنوع معين من العناصر نسميها (نجاح) اما المتبقي منه وهو $(N - N_1)$ لنوع اخر من العناصر نسميها (فشل) ، ثم نختار عينة عشوائية بحجم n من بدون إرجاع ، فان عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هي N_1 وعدد حالات الفشل هي $(N - N_1)$ ، وعليه

فان عدد الطرق لاختيار (x) من N_1 هي $C_{N_1}^{x}$

و عدد الطرق لاختيار (n-x) من $(N - N_1)$ هي $C_{N-N_1}^{n-x}$

وبالتالي عد الطرق الممكنة لاختيار (x) و (n-x) من N_1 و $(N - N_1)$ هي على الترتيب $\left(C_{N-N_1}^{n-x}\right) . \left(C_{N_1}^{x}\right)$

1- حسن ياسين طعمة و ايمان حسين حنوش – مرجع سابق ص ص 99-100

و عدد الطرق الكلية لاختيار **n** من **N** هي (C_N^n)

و بافتراض أن لدينا متغير عشوائي منفصل يمثل عدد النجاحات التي يمكن الحصول عليها و أن هذا التوزع يتبع التوزع الفوق الهندسي إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} \dfrac{(C_{N_1}^{x})\ (C_{N-N_1}^{n-x})}{C_N^n} & x = 0,1,2,3,\dots n \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عنه باختصار $x \backsim H(N_1\ , N - N_1\ )$

- **المميزات العددية له :**
- **التوقع الرياضي $E(x)$:** $E(X) = n \cdot \frac{N_1}{N}$
- **التباين $V(X)$:** $V(X) = n \cdot \frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
- **الانحراف المعياري :** $\delta_{(x)} = \sqrt{V(x)}$

ويدعي المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ بمعامل التصحيح أو معامل الشمولية (خاص بالمجتمعات المحدودة)

ملاحظة : إذا كان حجم العينة n صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع N فان معامل التصحيح يؤول إلي الواحد الصحيح و يصبح التباين في هذه الحالة يساوي التباين في حالة التباين في القانون الثنائي (توزع ذي حدين) ، و كقاعدة عامة إذا كان $(n < 10\%\ N)$ فانه لا يوجد فرق بين السحب بالإرجاع او بدون إرجاع و نستعمل في كلا الحالتين القانون الثنائي [1]

مثال : يتوفر في احد محلات بيع الهواتف 15 هاتف من نوع LG ، من بينها 3 أجهزة بها عطب ، اشترى احد الزبائن 6 أجهزة من هذا النوع من الهواتف دون فحصها

المطلوب : كتابة دالة التوزع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأجهزة المعطلة

- ما هو احتمال أن يكون من ضمن ما اشتره الزبون جهازين عاطلين

---

[1]- البشير عبد الكريم – الاحصاء 2 – مرجع سابق – ص 174

- اوجد التوقع و التباين لهذا التوزع

الحل : لدينا حالة توزع فوق الهندسي حيث

N= 15 , N1= 3 , N- N1 = 12 , n= 6

- دالة التوزع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأجهزة المعطلة

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} \dfrac{(C_3^x)\ (C_1^{6-x})}{C_1^6} & x = 0,1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- احتمال أن يكون من ضمن ما اشتره الزون جهازين عاطلين

$$f(2) = P(x = 2) = \frac{(C_3^2)\ (C_1^{6-2})}{C_1^6} = \frac{3(495)}{5005} = 0.297$$

- التوقع و التباين لهذا التوزع

– **التوقع الرياضي E(x) :** $\mathbf{E(X) = n \square \frac{N_1}{N} = 6 \square \frac{3}{1} = \frac{1}{1}}$

– **التباين V(X) :** $\mathbf{V(X) = n \square \frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

$$\mathbf{= 6 \square \frac{3}{1}\left(1 - \frac{3}{1}\right)\left(\frac{1\ -6}{1\ -1}\right) = \left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{9}{1}\right) = \frac{1}{3} = 0.6}$$

ك التوزع المنتظم :

يستخدم التوزع المنتظم المنفصل في حالة التطبيقات الإحصائية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية التي تأخذ عدد محددا من القيم باحتمالات متساوية اي انها تجارب متجانسة مثل رمي زهرة نرد مرة واحدة ، فإذا كان (x) يأخذ عدد محددا من القيم المنفصلة (X1, X2 ,…. Xn)

ففي هذه الحالة يكون لها نفس الاحتمال $\left(\frac{1}{n}\right)$ ويتوزع وفق التوزع المنتظم الذي تعطي دالة توزعه الاحتمالية كما يلي [1]

---

[1] - دلال القاضي وإخرون – الإحصاء للإداريين و الاقتصاديين – مرجع سابق – ص 189

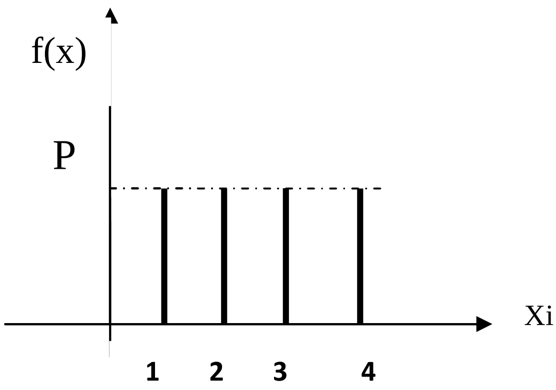
$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1,2,3,\ldots n \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

حيث $n > 0$

المميزات العددية له [1]:

- التوقع الرياضي $E(x)$: $E(X) = \frac{n+1}{2}$
- التباين $V(X)$: $V(X) = \frac{n^2 - 1}{1}$
- الانحراف المعياري : $\delta_{(x)} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{1}}$

أما التمثيل البياني لها فيكون



مثال : في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة اكتب التوزع الاحتمالي للمتغير العشوائي (x) و الذي يمثل الرقم الظاهر على وجه النرد و توقع وتباين هذا التوزع ، ومثله بيانيا

الحل : بما أن الحجر متجانس فان احتمال الحصول على أي من الأوجه الستة هو $p = \frac{1}{6}$

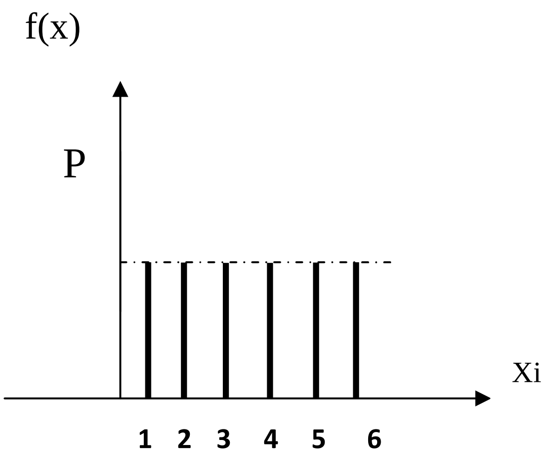
ودالة التوزيع له

[1]- احمد على الزغول – مقدمة في الاحتمالات – م-دار الفرقان – الطبعة الاول 1999- عمان الاردن – ص 123

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- التوقع الرياضي E(x) : $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$
- التباين V(X) : $V(X) = \frac{n^2 - 1}{1} = \frac{6^2-1}{1} = 2.9$

التمثيل البياني له



ثانيا – قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات العشوائية المستمرة :

المقصود بالمتغير المستمر هو المتغير الكمي الذي يقاس ولا يمكن عده ، لذا فان قيمه يمكن أن تحتوي على كسور مثل الطول و الوزن والأجر و حجم الإرباح ، ومن أهم التوزيعات المستمرة التي سنتطرق إليها هي نذكر

أ – التوزيع المنتظم : $x \sim \mu(\beta , \alpha)$

يعد التوزيع المنتظم المتصل هو التوزيع المناظر للتوزع المنتظم المنفصل عندما يكون المتغير العشوائي متصلا في فترة محدودة ([1]) ، و هو يستخدم في دراسة مثلا احتمال وصول البواخر إلى الموانئ لتفريغ حمولتا و أوقات مغادرتها و وصول الشاحنات إلى محطة التفرغ وكل ذلك خلال مجال محدد

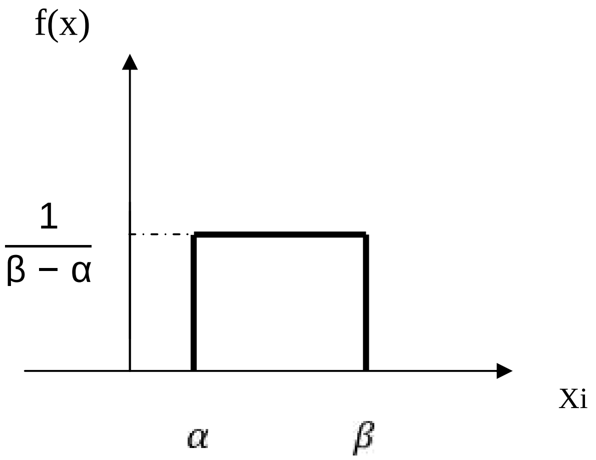
تعريفه : إذا كان المتغير العشوائي (x) معرفا على المجال $[\beta , \alpha]$ يتبع القانون المنتظم ، فانه يأخذ قيمة ثابتة (C) على طول هذا المجال [(2)] ، وتعطى دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزع كتالي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

ويعبر عن اصطلاحا $x \sim \mu(\beta , \alpha)$ ، وهذا يعني آن المتغير العشوائي (x) يتوزع وفق التوزيع المنتظم بالمعلمتين $(\beta \text{ و } \alpha)$ ، ويمثل بيانيا كما في الشكل التالي

[1]- احمد على الزعول – مرجع سابق – ص 153

[2]-موساوي عبد النور و برنان يوسف – مرجع سابق – ص 89



ويمكن إيجاد دالة التوزع التجميعية له كما يلي

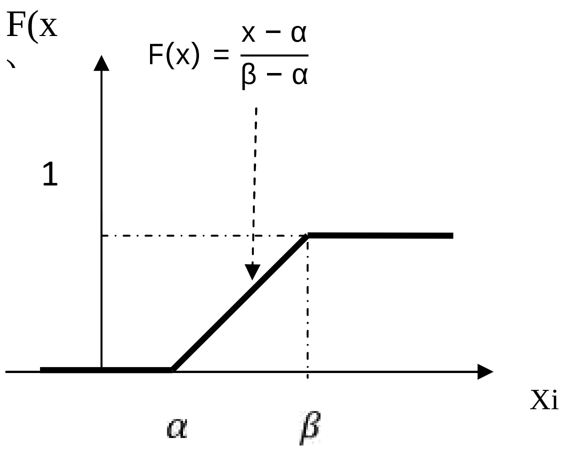
$$F(x) = p(x \leq xi) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{x} dx$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} [x]_{\alpha}^{x} = \frac{1}{\beta - \alpha} [x - \alpha] = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

وتكتب دالة التوزع كما يلي

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & , \quad x \in [\alpha \,,\, \beta] \\ 1 & , \quad x \geq \beta \end{cases}$$

و التمثيل البياني لدالة التوزع



المميزات العددية :

التوقع الرياضي E(x) :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{\beta-\alpha} dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2(\beta-\alpha)} \square\ E(x) = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

التباين V(x) :

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(x)\right)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x)^2 f(x)dx - \left(E(x)\right)^2 =$$

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int x^2 dx - \left(E(x)\right)^2 = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right] - \left(E(x)\right)^2$$

$$= \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3} = \left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2 \square\ V(x) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

الانحراف المعياري :

$$\delta_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}}$$

مثال : ليكن لدينا المتغير العشوائي المتصل (x) يتبع التوزع المنتظم بالمعلمتين $\beta = 6$ و $\alpha = -2$ أي $x \sim \mu(6, -2)$

المطلوب :

- كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي ؟
- كتابة دالة التوزع التجميعية له ؟
- إيجاد قيم الاحتمالات للقيم التالية ؟

$p(x > 2)$, $p\ (x \leq 3)$, $p(-3 < x \leq 7)$, $p\ (-3 < x \leq 1)$

الحل : لدينا $\beta = 6$ و $\alpha = -2$ $\quad x \sim \mu(6\,, -2\,)$

- كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & -2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- كتابة دالة التوزع التجميعية له

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & , \quad x \in [\alpha\ ,\ \beta] \\ 1 & , \quad x \geq \beta \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \alpha \\ \dfrac{x + 2}{8} & , \quad x \in [\alpha\ ,\ \beta] \\ 1 & , \quad x \geq \beta \end{cases}$$

- حساب قيم الاحتمالات للقيم التالية :

- $p(x > 2) = 1 - p(x \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{2+2}{8} = 0.5$
- $p\ (x \leq 3) = F(3) = \frac{3+2}{8} = 0.625$
- $p(-3 < x \leq 7) = P(x \leq 7) - p(x \leq -3) = F(7) - F(-3) = 1 - 0 = 1$
- $p\ (-3 < x \leq 1) = p(X \leq -1) - p(x \leq -3) = F(-1) - F(-3)$

$$= \frac{-1 + 2}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

ب- التوزيع (القانون) الآسي : (β) $x \sim E$

التوزيع الآسي هو توزيع احتمالي مستمر يستعمل عادة لوصف استغراق الوقت لأداء مهمة ما مثل الانتظار في الطابور أو الوقت اللازم لإصلاح جهاز معين أو الوقت الذي يمضي حتى يقع حدث عند نقطة تقاطع معينة أو مدة الحياة لبعض الأجزاء الالكترونية ....الخ [1]

بافتراض انه لدينا متغير عشوائي متصل و ليكن (x) يتوزع وفق التوزع الآسي فان دالة الكثافة الاحتمالية له تعطي بالشكل التالي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

و يعبر عنه باختصار (β) $x \sim E$

و هذا يعني أن x يتوزع وفق التوزع الآسي بالمعلمة (β)

ملاحظة : التوزع الآسي يقابل التوزع الهندسي في المتغيرة المنقطعة ، ففي حالة التوزع الآسي يمثل المتغير العشوائي الوقت الذي يمضي حتى يحصل حادث ما ، أما في التوزع الهندسي يتمثل المتغير العشوائي في عدد المحاولات حتى يحصل حادث ما

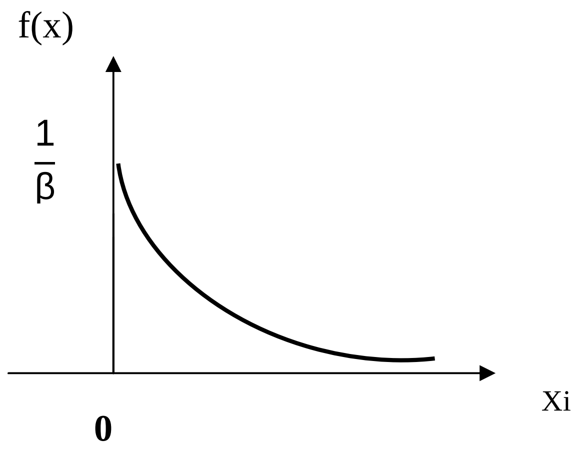
ومن الملاحظ أن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزع الآسي تتناقص بشكل أسي كلما زادت قيمة x و عندما تقترب x من اللانهاية فان دالة الكثافة الاحتمالية تقترب من الصفر [2]

والشكل التالي يوضح شكل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزع

---

[1]- البشير عبد الكريم – مرجع سابق – ص 183

[2]- احمد على الزغول – مرجع سابق – ص 159



دالة التوزيع : تعطي بالعلاقة التالية

$$F(x) = p(x \leq xi) = \int_0^x f(x)\,dx = \frac{1}{\beta}\int e^{\frac{-x}{\beta}}\,dx = \frac{1}{\beta}\left[-\beta e^{\frac{-x}{\beta}}\right]_0^x$$

$$= -\left[e^{\frac{-x}{\beta}} - 1\right] = 1 - e^{\frac{-x}{\beta}}$$

المميزات العددية :

- **التوقع الرياضي $E(x)$:** $E(X) = \beta$
- **التباين $V(X)$:** $V(X) = \beta^2$
- **الانحراف المعياري :** $\delta_{(x)} = \sqrt{\beta^2} = \beta$

مثال : اذا كان الفاصل الزمني بين مرور حافلتي نقل الطلبة باحد المواقف يتوزع توزيعا اسيا بمتوسط 4 دقائق ، **المطلوب**

- اكتب دالة الكثافة الاحتملية لهذا التوزيع
- احسب ان يطول الفاصل الزمني الي اكثر من دقيقتين لمرور حافلتين
- احسب ان يقل الفاصل الزمني الي عن دقيقتين لمرور حافلتين
- احسب المتوسط و التباين لمرور حافلتين

الحل : لدينا $(\mathbf{4}) \quad x \backsim E$

- دالة الكثافة الاحتملية لهذا التوزيع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{\frac{-x}{4}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- حساب احسب ان يطول الفاصل الزمني الي اكثر من دقيقتين لمرور حافلتين

$$p(x > 2) = 1 - p(x \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - e^{\frac{-2}{4}}\right)$$

$$= e^{\frac{-2}{4}} = e^{-0.5}$$

- حساب ان يقل الفاصل الزمني الي عن دقيقتين لمرور حافلتين

$$p(x < 2) = F(2) = \left(1 - e^{\frac{-2}{4}}\right) = 1 - e^{\frac{-2}{4}} = 1 - e^{-0.5} =$$

- حساب المتوسط و التباين لمرور حافلتين
- **التوقع الرياضي E(x) :** $\mathbf{E(X) = \beta = 4}$
- **التباين V(X) :** $\mathbf{V(X) = \beta^2 = 16}$

ج- التوزيع الطبيعي : $x \backsim N(\mu \ , \ \delta)$

يعتبر التوزع الطبيعي المعياري من أهم التوزعات الاحتمالية الأكثر استخداما كون أن معظم الظواهر تتبع هذا التوزع أو تؤول إليه ، فان حجم العينة إذا كبر فان التوزع يقترب من التوزع الطبيعي [1] ، حيث يستعمل في وصف متغيرات الأوزان و الأطوال و مستوى الذكاء و العمر و درجات الحرات وتغير الأجور ... الخ

تعريفه : بافتراض انه لدينا متغير عشوائي متصل و ليكن (x) يتوزع وفق التوزع الطبيعي بوسط حسابي (μ) و انحراف معيار (σ) فان دالة الكثافة الاحتمالية له تأخذ

[1] - ثائر فيصل شاهر- مرجع سابق – ص 35

الشكل التالي [1]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} & x \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

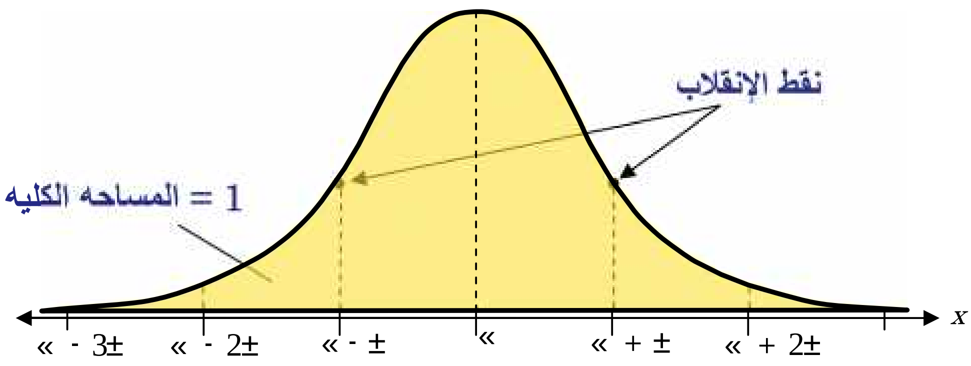
حيث $(\mu\ ,\ \delta)$ هما معلمات التوزع الطبيعي ثابتان و

$(\delta^2 > 0\ \ , -\infty < \mu < +\infty\ )$

و $\pi = 3.142286$ و $e = 2.71828$ هو العدد النيبيري

و يعبر عنه باختصار $x \sim N(\mu\ ,\ \delta)$

أما تمثيلها البياني



حيث نجد المسحات التالية حسب هذه المجالات

$$p(\mu - \delta \leq x \leq \mu + \delta) = 68.26\ \%$$

$$p(\mu - 2\delta \leq x \leq \mu + 2\delta) = 95.44\ \%$$

$$p(\mu - 3\delta \leq x \leq \mu + 3\delta) = 99.74\ \%$$

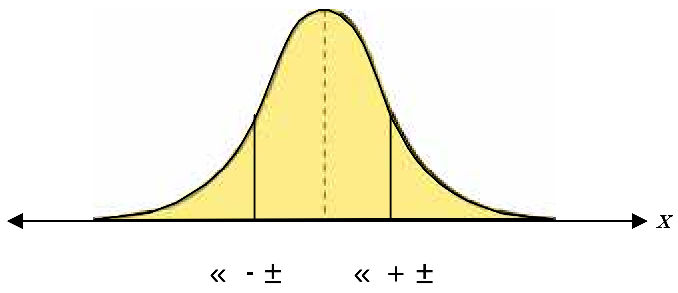
المميزات العددية :

[1]- البشير عبد الكريم – مرجع سابق – 175 و انظر أيضا احمد على الزغول – مرجع سابق – ص 179

- التوقع الرياضي $E(x)$: $E(X) = \mu_{(x)}$
- التباين $V(X)$: $V(X) = \delta^2$
- الانحراف المعياري : $\delta_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\delta^2} = \delta$

خصائص التوزيع الطبيعي : تتمثل ابرز هذه الخصائص في [1]

- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزع الطبيعي معرفة بالمعلمتين $x \sim N(\mu\ ,\ \delta)$
- منحي دالة الكثافة الاحتمالية للتوزع الطبيعي يشبه شكل الناقوس (الجرس) و يكون متماثلا حول المحور الرأسي المار بقمته أي عند $X = «$ لذلك فإن هذا العمود يجزئ المنحنى الطبيعي إلى قسمين متماثلين فى الشكل والمساحة. و بالتالي قيمة $x = x$ تساوي قيمة الدالة عند القيمة $X = -x$
- طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلى ∞ و يتقارب المنحي f(x) من الصفر عند الطرف



- .المنحنى له نقطتا انقلاب عند $X = « \pm\pm$
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح .

$$p(-\infty < x < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ d\ \ = 1$$

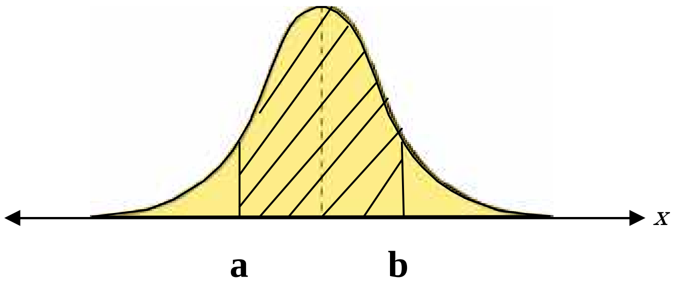
- نظرا لتطابق جانبيه وتوسط تفرطحه فإن مقاييس النزعة المركزية الثلاثة (الوسط الحسابي والوسيط والمنوال) تلتقي فى نقطه واحده (فى منتصف التوزيع) أي تكون متساوية الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

---

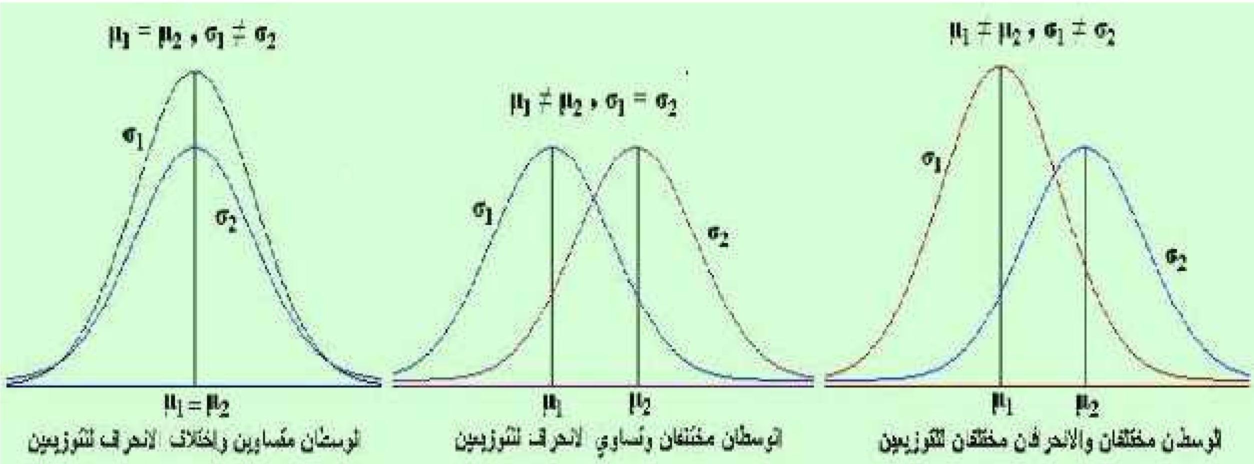
[1] - كمال فليفل – مرجع سابق – ص 156 و محمد صبحي ابو صالح – مرجع سابق -*- ص 149

- يمكن حساب المساحة تحت منحني التوزع الطبيعي بين النقطتين (a , b)

$$p(a < x < b) = \int_{-a}^{+b} f(x)\ d \ = p(x \leq b) - p(x \leq a) = F(b) - F(A)$$



- كل توزع طبيعي يختلف عن الأخر باختلاف الوسط الحسابي و الانحراف المعياري ، القيمة الصغيرة لـ σ تعني أن لدينا جرس طويل مدبب، والقيمة الكبيرة لـ σ تعني أن الجرس قصير ومفرطح.



مثال1: تتبع سيدة حمية غذائية لمدة ثلاثة أيام أسبوعيا ، ووجد أن فقدانها لوزنها يخضع للتوزع الطبيعي بمعدل μ =600 g وانحراف معيار σ=200 g.

ما هي النسبة التي ستفقدها السيدة من وزنها إذا فقدت من 400 g الى 600 g ؟

الحل: لدينا

$$p(\mu - \delta \leq x \leq \mu + \delta) = p(600 - 200 \leq x \leq 600 + 200)$$
$$= p(400 \leq x \leq 800) = 68.26\,\%$$

$$p(\mu - 2\delta \leq x \leq \mu + 2\delta) = p(600 - 2 \cdot 200 \leq x \leq 600 + 2 \cdot 200)$$
$$= p(200 \leq x \leq 1000) = 95.44\,\%$$

$$p(\mu - 3\delta \leq x \leq \mu + 3\delta) = p(600 - 3 \cdot 200 \leq x \leq 600 + 3 \cdot 200)$$
$$= p(0 \leq x \leq 1200) = 99.74\,\%$$

نلاحظ أن المجال المطلوب لفقدان وزن بين 400 g إلى 600 g هو هي المساحة المحصورة تحت المنحنى الطبيعي ل $\mu \pm 1\sigma$ ، اذا النسبة المساوية لفقد بمعدل 6000±200 أو $\mu \pm 1\sigma$ هي $p(400 \leq x \leq 800) = 68.26\,\%$

ملاحظة: بما أن الوسط و الانحراف المعياري للتوزع الطبيعي يحددان شكل المنحني فان المساحة تحت أي فترة وفق الخط الأفقي تعتمد على هاتين المعلمتين و بالتالي فإننا لا نستطيع وضع جداول لجميع قيم الوسط الحسابي و الانحراف المعياري كذلك فان التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة رياضية Transform، يمكن استخدام توزعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة تحويله إلى التوزع الطبيعي المعياري [1]

د- التوزع الطبيعي المعياري : $x \sim N(0\ ,\ 1)$

هو توزع طبيعي وسطه الحسابي **0** وانحرافه المعياري يساوي **1** أي **$\mu = 0$** و **$\sigma = 1$** [2] و تكون دالة كثافته الاحتمالية [3]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} & x \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

---

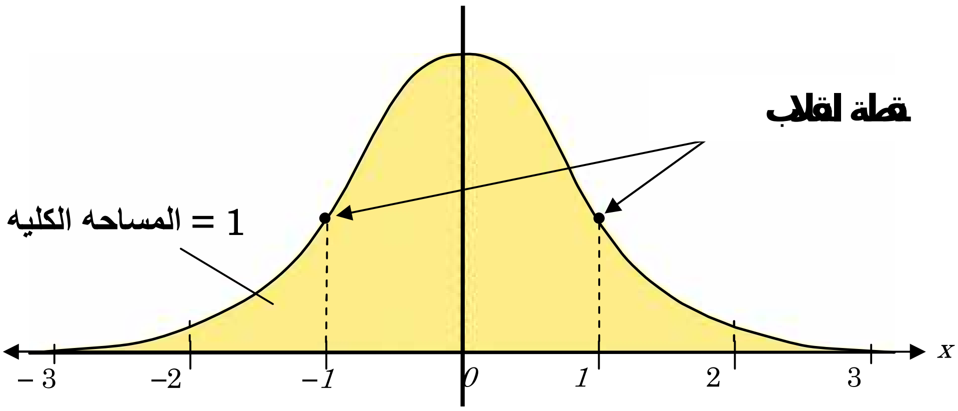
[1] - ثائر فيصل شاهر – مرجع سابق – ص 37

[2] - حسن ياسين طعمة و ايمان حسين حنوش – مرجع سابق – ص 129

3

ويعبر عنه باختصار $x \sim N(0\ ,\ 1)$ ، والشكل التالي يوضح المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي المعيار

المنحنى الاحتمالي للتوزيع الطبيعي المعياري



μ =0

خصائص المنحنى البياني للتوزيع الطبيعي المعيار

- طرفا التوزيع تمتد من $-\infty$ إلى $+\infty$
- متماثل حول العمود الذي يمر بقمته أي عند $0 = « = \overline{X}$ لذلك فإن هذا العمود يجزئ المنحنى الطبيعي المعيار إلى قسمين متماثلين في الشكل والمساحة.
- يشبه الناقوس من حيث الشكل.
- المنحنى له نقطتا انقلاب عند $X = \pm 1$
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح .

لقد عرفنا سابقا أن هناك العديد من التوزيعات الطبيعية والتي تعتمد على قيم σ، μ، ولتحديد المساحة تحت المنحنى لتحديد احتمال أي متغير عشوائي يقع في الفترة $p(a < x < b)$، يجب تصميم أعداد لا نهائية من الجداول الطبيعية حسب قيم المتوسط الحسابي و الانحراف المعيار وهو من المستحيل.و من ناحية أخرى ، التوزيع الطبيعي المعيار له $\mu = 0$

و $\sigma = 1$ وهو ما يقلص حاجتنا لجداول الأعداد للتوزيعات الطبيعية العديدة إلى جدول التوزيع الطبيعي المعيار فقط ، و بالتالي ويمكن تحويل أي توزيع طبيعي (بوحدات x) إلى توزيع طبيعي معيار (بوحدات z) ولإيجاد الاحتمالات (المساحات) في مسائل تحتوي على التوزيع الطبيعي ، فإننا نحول أولا قيم x إلى قيم z المناظرة لها ، من خلال المعادلة التالية[1] :

$$Z = \frac{X - «}{\pm}$$

أي أن أي قيمه من قيم المتغير X يمكن تحويلها إلي المتغير المعيارة Z الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعيار باستخدام التحويل السابق.

كيفية استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعيار $x \backsim N(0\ ,\ 1)$

يتم استخراج قيمة الاحتمال من الجدول التوزيع الطبيعي المعيار [2] عبر المراحل التالية

- تحويل المتغيرة (x) إلي متغيرة معيارة

$$x \backsim N(\mu\ , \delta) \Leftrightarrow Z = \frac{x-\mu}{\delta} \backsim N(0\ ,1)$$

- بما أن الجدول يمثل تابع التوزيع فان القيمة الجدولية f(Z) تسمح بإعطاء الاحتمالات التي تكون على الشكل التالي

$$f(z) = f\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right) = p(z < z) = p(z \le z)$$

- إن الجدول يسمح بإعطاء الاحتمالات المقابلة لقيم (z) الموجبة فقط

➢ $p(x \le x) = p(Z \le \frac{x-\mu}{\delta})$

➢ $p(z \le -z) = p(Z \ge z) = 1 - p(z \le z) = 1 - F(z)$

➢ $p(Z > z) = 1 - p(z \le z) = 1 - F(z)$

➢ $p(z > -z) = p(Z \le z) = F(z)$

إذا كان عددين موجبين فان

---

1 -Dennis D. Wackerly, William Mendenhall and Richard L. Scheaffer (2008), Mathematical Statistics with Applications, 7 th Edition, Thomson Books, USA.- p180

2- انظر في ذلك الملحق في أخرى المطبوعة

- $p(a \le z \le b) = p(Z \le b) - p(z \le a) = F(b) - F(a)$
- $p(-a \le z \le a) = p(Z \le a) - p(z \le -a) =$

$$p(z \le a) - \big(1 - p(z \le a)\big) = 2\ \ (z \le a) - 1 = 2\ \ (a) - 1$$

- لحساب الاحتمال تحت المنحنى الطبيعي المعيار بين z=0 و z=1.27 نحصل عليها مقابلة للقيمة 1.27 في جدول التوزع الطبيعي المعيار ، ففي **عمود** z نبدأ بالقيمة

(1.2)ونتحرك أفقيا في الصف المناظر لها حتى نصل إلى العمود المعنون(.07)ثم نقرأ قيم الاحتمال داخل الجدول وتكون القيمة التي نحصل عليها (0.8980) . كما هو موضح في الشكل باختصار

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319

ملاحظات:

- $P(-\infty \le Z \le \infty) = 1$
- المساحة تحت أي نقطة تساوي الصفر p(z= a)=0
- $P(Z \le 0) = P(Z \ge 0) = 0.5$

مثال : إذا كان Z متغير عشوائيا متصلا يتبع التوزع الطبيعي المعيار فأوجدا

1. $P(Z \leq 1.54)$
2. $P(-1.8 \leq Z \leq 0)$
3. $P(1 \leq Z \leq 2)$

الحل :

1- نقرأها من الجدول مباشرة $P(Z \leq 1.54) = 0.9382$

2- $P(- 1.8 \leq Z \leq 0)= P(Z \leq 0)-P(Z \leq -1.8) =p(z \leq 0)-(1- p(z \leq 1.8))$
$= 0.5-1 + 0.9641 = 0.4641$

3- $\mathbf{P(1 \leq Z \leq 2)} = P(Z \leq 2) - P(Z \leq 1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$

مثال 2 : إذا كانت أطوال مجموعه من الطلبة تتبع توزعاً طبيعياً متوسطه 168 سم و انحرافه المعيار 6 سم. أخذنا عشوائياً أحدا لطلبة . ما هو احتمال أن يكون طوله:

1. أقل من 159 سم؟
2. أكبر من 180 سم؟
3. أن يكون طوله واقعاً في المجال , 165سم و 174سم ؟

الحل : إذا جعلنا X ترمز لأطوال الطلبة , فإن X تكون متغيراً عشوائياً يتبع توزعاً طبيعياً متوسطه 168 سم ، وانحرافه المعيار 6 سم. و نكتب $x \sim N(1 \quad , 6)$

1. احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 159 سم

$$P(X \leq 159) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{159-168}{6}\right)$$
$$= P(Z \leq -1.5) = 1 - p(z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.066$$

2– احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 180 سم؟

$$P(X \geq 180) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{180-168}{6}\right) = P(Z \geq 2) \quad = 1 - P(Z \leq 2)$$
$$= 1 - 0.9772 \quad = 0.0228$$

1. – احتمال أن يكون طول الطالب واقعاً في المجال , 165سم و 174سم

$$P(165 \leq X \leq 174) = P\left(\frac{165-168}{6} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{174-168}{6}\right)$$
$$= P(-0.5 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0.5)$$
$$= 0.8413 \quad - \quad 0.3085 \quad = \quad 0.5328$$

ك- توزيع كي مربع $\chi_v^2 \backsim x^2$:

يعتبر توزيع كاي تربيع من التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاستخدام حيث توجد له تطبيقات عديدة بدرجة يمكن معها القول أنه يأتي في المرتبة الثانية للتوزع الطبيعي من حيث كثرة تطبيقاته.

لتكن X_1 ، X_2 ، X_3 ، ...... X_n متغيرات عشوائية مستقلة تتبع التوزع الطبيعي المعياري

$x \backsim N(0\ ,\ 1)$ ، ولتكن المتغيرة العشوائية χ^2 كاي مربع تساوي

$$X_k^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots\ldots + X_v^2 = \sum_{i=1}^{v} X_v^2$$

χ^2 كي مربع لعدد **V** من درجات الحرية ، ونقول أن المتغيرة χ^2 تتبع التوزع كاي مربع بدرجة حرية **V** و نكتب : $\chi_v^2 \backsim x^2$

حيث v هي درجة الحرية و هي تمثل حجم العينة أو عدد المتغيرات العشوائية و له دالة كثافة احتمالية تعطي بالعلاقة التالية [1]

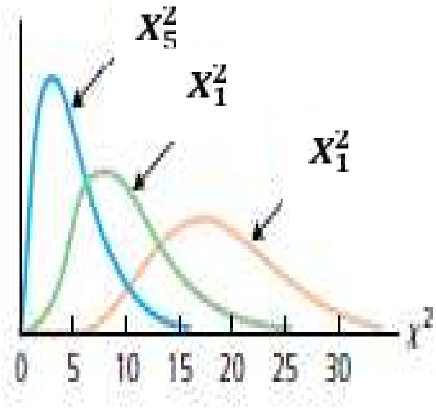
$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)}\ e^{\left(\frac{-x}{2}\right)}}{2^{\left(\frac{v}{2}\right)}\ \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

حيث $\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$ هي دالة قاما ، و يختلف شكل منحي كاي مربع باختلاف درجات الحرية كما هو موضح في الشكل [2]

---

1 - البشير عبد الكريم – مرجع سابق –ص 186

2 -Neil A. Weiss (2017), ***Introductory Statistics***, Pearson Education Limited,Tenth edition, England.p-599



تغير منحي كاي تربيع حسب درجة الحرية

أما الدالة التجميعية دالة التوزيع $F(\chi^2)$ تكتب كما يلي

$$F(x^2 \leq x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\left(\frac{v}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^x \mu^{\left(\frac{v}{2}-1\right)} e^{\frac{-\mu}{2}}\, d\,, & x \geq 0 \\ 0\,, & x < 0 \end{cases}$$

المميزات العددية :

- **التوقع الرياضي $E(x)$:** $E(X) = V$
- **التباين $V(X)$:** $V(X) = 2$

أهم استعمالات كاي تربيع :

- تقرب توزع تجربي بتوزع نظري معين
- اختيار تجانس عينتين أو أكثر
- اختيار الاستقلالية لمعطيات كيفية
- اختيار حسن المطابقة [1]

خصائص توزع كاي مربع :

- إن قيمة كاي مربع موجبة دائما $(\chi^2 > 0)$
- إن الوسط الحسابي هو عدد درجات الحرية للتوزع $E(X) = V$
- إن التباين هو ضعف درجات الحرية $V(X) = 2V$

1- ثائر فيصل شاهر – مرجع سابق – ص 41

- إن منحني توزع كاي مرع ملتوي نحو اليمين (التواء موجب)
- كلما زادت درجات الحرية كلما زاد المتوسط والتباين وبالتالي تزداد درجة تفرطح منحنى توزيع مربع كاي ويقترب شكله من منحنى التوزيع الطبيعي.

ملاحظة 1: لإيجاد المساحة تحتي منحني كاي مرع او إيجاد القيم التي تقع إلي يسارها أو يمينها مساحة معينة نستعمل جدول كاي مرع [1] حيث يسجل عدد درجات الحرية في العمود الأيسر و يسجل المساحات إلي يسار قيمة كاي مرع على الخط الأفقي و نسجل قيمة كاي مرع داخل الجدول و يعبر عن ذلك ب $\mathbf{p}\left(\mathbf{x}^{2} \leq \chi^{2}_{(v,p)}\right)$

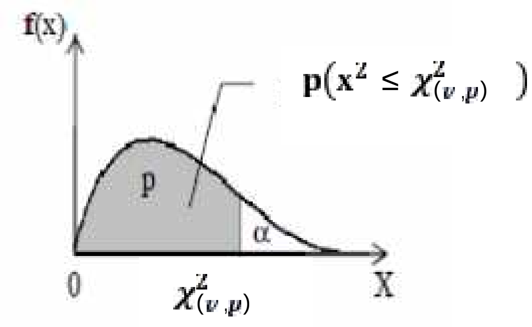
مثال اوجد قيمة χ^{2} إلي يسار 0.99 عند درجة حرية 10

$$\chi^{2}_{(v,p)} \Rightarrow \chi^{2}_{(1\quad,\ 0.9\ )} \quad = 2\ \ .2$$

df	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	.0000	0002	.0010	.0039	.0158	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	0201	.0506	.1026	.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.0717	1148	.2158	.3518	.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	2070	2971	.4844	7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.4117	5543	.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	6757	8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32

ملاحظة2 : في الجداول الإحصائية لكاي مرع نعتمد على تعين قيمة المتغيرة ل ك2 على المحور الأفقي من خلال قيمة درجة الحرية $\boldsymbol{v}$ إلى مساحة $\boldsymbol{p}$ على يسار كاي مرع ، أي $\mathbf{p}\left(\mathbf{x}^{2} \leq \chi^{2}_{(v,p)}\right)$ ، أما على يمينها نضع $\alpha = 1 - p$

[1]- اظر في ذلك الملحق في أخرى المطبوعة



مثال : قيمة χ^2 التي تكون الي يمينها 0.75من المساحة هي $\chi^2_{(1\ ,0.2\ )} = 0.0$

حيث نضع $\alpha = 1 - p = 1 - 0.75 = 0.25$

ملاحظة 3 :يقترب توزع كاي مربع إلى التوزع الطبيعي عندما يكون حجم العينة

$\mathbf{v \geq 3}$ اي $n \geq 3$ ، ويعتبر تقرب جيد و يصبح

$$\left(\sqrt{2x^2} - \sqrt{2 \quad - 1}\right) \sim N(0\ ,1)$$

مثال : أو جد قيمة χ^2_0 الجدولية الموافقة لاحتمال p= 0.95 من اجل درجة حرية $\boldsymbol{v}$=**15**

و v=22 ***!*** v=**50**

الحل : من اجل درجة حرية **v=15**

$$p(\chi^2 \leq \chi^2_0\ ) = 0.9 \quad \square\ \chi^2_0 = \chi^2_{(v,p)} \quad \square\ \chi^2_{(1\ ,0.9\ )} \quad = 2$$

$$\square\ p(\chi^2 \leq \chi^2_{(1\ ,0.9\ )}\ ) = 0.9 \quad \square\ p(\chi^2 \leq 2\ ) = 0.9$$

من اجل درجة حرية **v=22**

$$p(\chi^2 \leq \chi^2_0\ ) = 0.9 \quad \square\ \chi^2_0 = \chi^2_{(v,p)} \quad \square\ \chi^2_{(2\ ,0.9\ )} \quad = 3\ .9$$

$$\square\ p(\chi^2 \leq \chi^2_{(2\ ,0.9\ )}) = 0.9 \quad \square\ p(\chi^2 \leq 3\ .9\ ) = 0.9$$

من اجل درجة حرية v=50 قيمة درجة الحرية لا توجد ومنه نقربها إلى التوزع الطبيعي المعيار لان $\mathbf{v \geq 3}$

ويعتبر تقرب جيد $\left(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2 \quad - 1}\right) \sim N(0\ ,1)$

لدينا $p(Z \le Z_0) = 0.95$ فنجد القيمة المعيارية هي $p(Z \le 1.65) = 0.95$

ومنه $Z_0 = 1.65$ ، نبحث عن قيمة χ_0^2 من خلال المتغيرة المعيارية

$$p\left(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\ \ -1} \le 1.6\ \right) = 0.9 \ \square$$

$$p\left(\sqrt{2\chi^2} \le \sqrt{2\ \ -1} + 1.6\ \right) = 0.9 \ \square$$

$$p\left(2\chi^2 \le \left(1.6\ + \sqrt{2\ \ -1}\right)^2\right) = 0.9 \ \square$$

$$p\left(\chi^2 \le \frac{\left(1.6\ + \sqrt{2\ \ -1}\right)^2}{2}\right) = 0.9 \ \square$$

$$p\left(\chi^2 \le \frac{\left(1.6\ + \sqrt{9}\ \right)^2}{2}\right) = 0.9 \ \square$$

$$p(\chi^2 \le 6\ .2\ ) = 0.9 \ \square\ \chi^2_{(v,p)} = \chi^2_{(5\ \ ,0.9\ )} = 6\ .2$$

مثال 2 : اوجد قيمة χ_0^2 الجدولية الموافقة لاحتمال $p = 0.10$ من اجل درجة حرية **v=5**

حيث $p(\chi^2 \ge \chi_0^2\ ) = 0.1$

لدينا $p(\chi^2 \ge \chi_0^2\ ) = 0.1 \ \square\ \alpha = 1 - p = 1 - 0.1\ = 0.9$

$$p(\chi^2 \le \chi_0^2\ ) = 0.9 \ \square\ \chi_0^2 = \chi^2_{(5,\ \ 0.9\ )} = 9.2$$

د- توزيع ستودنت $T \sim t_v$:

تعريف : ليكن لدينا متغيران عشوائيان (X) و (Y) حيث (X) يتبع التوزع الطبيعي المعياري $x \sim N(0\ ,\ 1)$ و (Y) يتبع توزع كاي مربع χ^2 بعدد درجات حرية **v** فنحصل على المتغيرة (t_v) من خلال العلاقة التالية

$t_v = \dfrac{x}{\sqrt{\frac{y}{v}}}$ ، ويدعى توزع ستودنت بعدد درجات حرية **v** [1]

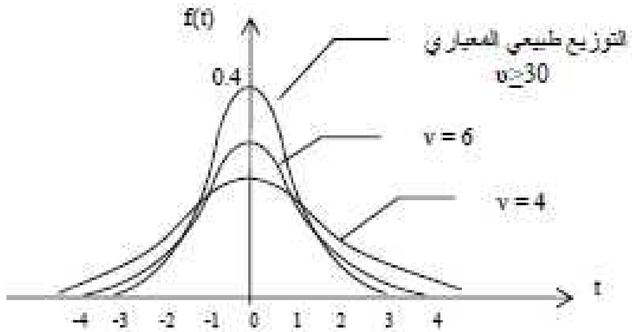
1- احمد عامر عامر – الإحصاء 2 – مرجع سابق ص 190

دالة الكثافة الاحتمالية: له تعطي بالعلاقة التالية [1]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \qquad x \in \mathcal{R}$$

حيث $(-\infty \leq x \leq +\infty)$ و **v** عدد صحيح موجب يمثل عدد درجات الحرية ، و نقول إن المتغيرة (t_v) تتبع توزع ستيودنت ب n درجة حرية ونكتب $T \sim t_v$

إن التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت يأخذ شكلا متناظرا مدببا نحو الأعلى، وكلما ارتفعت درجة الحرية كلما بدأ في التقارب نحو التوزع الطبيعي، عمليا عندما تكون درجة الحرية تفوق 30 يتقارب توزع ستودنت نحو التوزع الطبيعي
و التمثيل البياني لتوزع t_v حسب دراجات الحرية يكون كما يلي



المميزات العددية له :

- **التوقع الرياضي $E(x)$:** $E(X) = 0$
- **التباين $V(X)$:** $v>2$ .... $V(X) = \frac{v}{v-2}$

خصائص توزيع ستيودنت : [2]

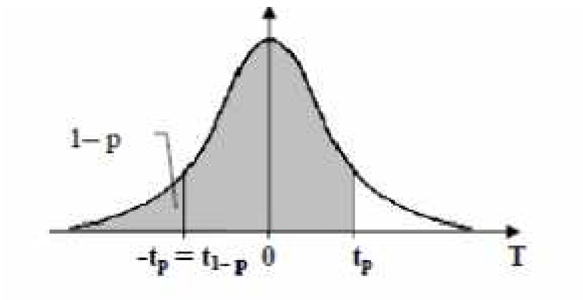
- له شكل جرسي و متناظر حول وسطه الحسابي

---

[1] - بوعظم كمال – مرجع سابق – ص 99

[2] - ثائر فيصل شاهر – مرجع سابق - 43

- توزع ستيودنت أكثر تفرطح من التوزع الطبيعي و بالتالي نسبة كبيرة من المساحة تقع على طرفي التوزع
- المنحني موجود فوق المحور الأفقي $f(x) > 0 \quad \square\, x \,\square\, \mathcal{R}$
- كلما زاد حجم العينة v أي $v \geq 3$ اقترب توزع ستيودنت من التوزع الطبيعي المعياري
- توزع ستيودنت متناظر ومنه فان $t_p = -t_{1-p} = -t_p$



حساب المساحة تحت منحني توزع ستيودنت :

لحساب المساحة تحت منحني توزع t_v من خلال درجة الحرية نستعمل جدول ستيودنت لذلك[1] $p(t \leq t_{v\ p}) = ؟$ ، فمثلا اذا نظرت الي القيمة الاحتمال 0.90 على الخط الافقي العلوي و درجة الحرية 5 في العمود الايسر فنقطة التقاطع لها عند القيمة 1.4759 هي قيمة $t_{5-\ 1.4}$ = التي يقع الى يسارها 0.90من المساحة أي

$$p(t \leq t_{5\ \ 0.9}) = 1.4$$

α	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074

1- انظر في ذلك الملحق في أخرى المطبوعة

مثال : احسب الاحتمالات التالية عند درجة حرية v=7

$p(t \geq 1.894) = ؟$ ، $p(t \leq 2.364) = ؟$

عند درجة حرية 20 اوجد قيمة الاحتمال ، $p(1.325 \leq t \leq 2.528) = ؟$

الحل :

- عند درجة حرية v=7

$p(t \leq 2.364) = ؟$ من الجدول مباشرة نجد $p(t \leq 2.364) = 0.975$

$$p(t \geq 1.894) = 1 - p(t \leq 1.894) = 1 - 0.95 = 0.05$$

- عند درجة حرية 20ايجاد قيمة الاحتمال ، $p(1.325 \leq t \leq 2.528) = ؟$

$$p(1.325 \leq t \leq 2.528) = p(t \leq 2.528) - p(t \leq 1.325)$$
$$= 0.99 - 0.9 = 0.09$$

ط – توزيع فيشر $X \sim F_{(v_1, v_2)}$:

ليكن y_1 و y_2 متغيران عشوائيان مستقلان عن بعضهما البعض يتبعا ن كل منهما توزع χ^2 كاي مربع ، حيث $y_1 \sim \chi^2_{v_1}$ و $y_2 \sim \chi^2_{v_2}$ ، واكل منها درجة حرية هما v_1 و v_2 على التوالي فان المتغيرة العشوائية X التي هي عبارة عن العلاقة التالية

$$X = \frac{\frac{y_1}{v_1}}{\frac{y_2}{v_2}} \sim F_{(v_1\ \ v_2)}$$

يتبع توزع فيشر بدرجة حرية للبسط v_1 و درجة حرية للمقام v_2 وله دالة كثافة احتمالية التالية [1]

1- اخمد عامر عامر – مرجع سابق – ص 192

$$f(X_{\upsilon_1,\upsilon_2}) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}\right)\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\frac{\upsilon_1}{2}} X^{\frac{\upsilon_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\upsilon_2}{2}\right)\left(1+X.\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^{\left(\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}\right)}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

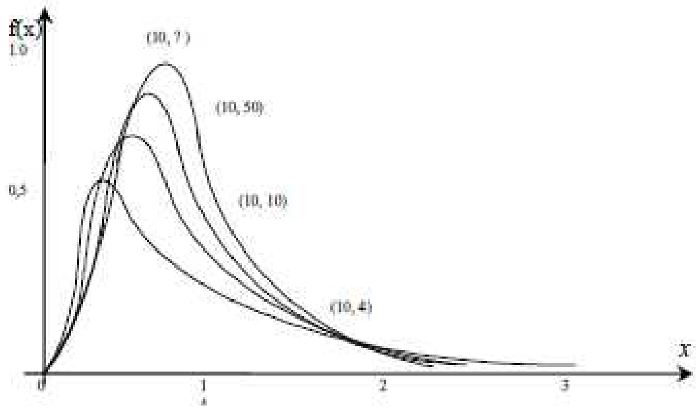
ونقول أن المتغيرة X تتبع توزع فيشر بدرجة حرية للبسط υ_1 و درجة حرية للمقام υ_2

ونكتب $X \sim F_{(\upsilon_1,\upsilon_2)}$

المميزات العددية له :

- **التوقع الرياضي E(x) :** $\mathbf{E(X)} = \mu = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_2-2} \quad \ldots\ldots \upsilon_2 > 2$
- **التباين V(X) :** $\mathbf{V(X)} = \frac{2(\upsilon_1+\upsilon_2-2)}{\upsilon_1(\upsilon_2-4)}\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_2-2}\right)^2 \ldots\ldots\ \upsilon_2 > 4$

نلاحظ : انه من اجل $2 \leq \upsilon_2$ لا يوجد توقع رياضي و من اجل $4 \leq \upsilon_2$ لايكون هناك تباين لحسابه



إن توزع فيشر هو توزع مستمر غير متناظر و له قيمة واحدة و يأخذ في الاستقامة و الاقتراب من التوزع الطبيعي كلما زادت قيمة υ_2 ، ولكنها لاتاخذ الشكل الناقوس مهما اقترت قيمة $\upsilon_2 \longrightarrow \infty$ ، و الملاحظ انه كلما اقترت υ_2 من ∞ مع ثبات $\upsilon_1 = \upsilon$ نجد أن توزع

فيشر يقترب من توزع كاي مربع $\frac{\chi^2}{v}$ ، ومن اجل $v_1 = 1$ و $v_1 = v$ يكون التوزع يقترب من توزع ستيودنت t^2 و مثله مثل توزع كاي مربع يكون منحني توزع فيشر يميل نحو

اليمين [1] ، ويظهر من المعادلة تبعية منحنى f(x) بالإضافة إلى X إلى كل من v_1 و v_2 ولذلك تحدد أي نقطة F من خلال ثلاثة معالم هي v_1 و v_2 و **P** ، و المساحة تحتي المنحني **F** تكون على يسار النقطة **F** و نكتب $F_{(p,\ v_1, v_2)}$ و في الغالب تعطي الجداول الإحصائية قيم فيشر [2] عند المساحة 0.95 و 0.99 او 0.90 ، [3]

$p\left(F \le F_{(p,\ v_1, v_2)}\right) = p$ مثال ذلك $F^{0.9}_{(5\ ,1\ \ )} = 3.33$ من خلال الجدول نجدها

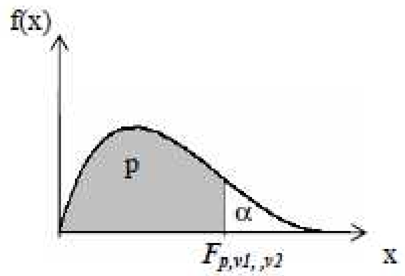


Tableau F2 0.95

$n_2 \setminus n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67

[1] - احمد عامر عامر – مرجع سابق ص 194

[2] - اظر في ذلك الملحق في أخرى الطبوعة

[3] - اظر الملاحق أخر الطبوعة

نظريات : [1]:

$$a)\ F_{1-p\ ,\ v_1, v_2} = \frac{1}{F_{p\ ,\ v_2,\ v_1}}$$

$$b)\ F_{1-p\ ,1\ ,v} = t^2_{1-\left(\frac{p}{2}\right).v}$$

$$c)\ F_{p\ ,v\ ,\infty} = \frac{\chi^2\ p.v}{v}$$

عند قرأتنا ل قيم F من الجدول نلاحظ أن بعض القيم غير موجودة فيه مثل $F_{(0.0\ ,\ v_1, v_2)}$ هنا نستعمل العلاقة التالية

$$F_{\lambda\ ,\ v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\lambda\ ,\ v_2\ ,\ v_1\ ,}}$$

مثال : احسب القيم التالية

$F^{0.9}_{(1\ ,3)} =$ ، $F^{0.9}_{(1\ ,2)} =$ ، $F^{0.9}_{(3\ ,1\ )} =$ ، $F^{0.9}_{(1\ ,5)} =$ ، $F^{0.9}_{(2\ ,8)} =$

$F^{0.0}_{(1,\ 5)} =$ ، $F^{0.0}_{(2\ ,1\ )} =$

الحل :

$F^{0.9}_{(1\ ,3)} = 8.79$ ، $F^{0.9}_{(1\ ,2)} = 19.40$ ، $F^{0.9}_{(3\ ,1\ )} = 3.71$

$F^{0.9}_{(1\ ,5)} = 16.26$ ، $F^{0.9}_{(2\ ,8)} = 8.65$

$F^{0.0}_{(1,\ 5)} =$ هنا نستخدم العلاقة $F_{\lambda\ ,\ v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\lambda\ ,\ v_2\ ,\ v_1\ ,}}$ فتصبح

$$F^{0.0}_{(1,\ 5)} = \frac{1}{F^{0.9}_{(5\ ,1)}} = \frac{1}{8.85} = 0.113$$

$$F^{0.0}_{(2\ ,1\ )} = \frac{1}{F^{0.9}_{(1\ ,2)}} = \frac{1}{99.40} = 0.01$$

[1]- بوعبدلله صالح (8002) ، **محاضرات الإحصاء الرياضي**، مطبوعة لطلبة كلية العلوم الاقتصادية، جامعة .المسيلة، السنة الجامعية 2008- ص 73

تمارين محلولة

التمرين الأول : إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو 0.9 فإذا أجريت العملية لعشرة من المرضي احسب الاحتمالات التالية

- احتمال نجاح العملية ل 7 من المرضي
- احتمال نجاح العملية لجميع المرضي
- احتمال نجاح العملية ل 8 من المرضي
- احتمال نجاح العملية ل 8 من المرضي علي الأقل
- توقع عدد المرضي الذين سيجرون العملية بنجاح
- تباين المرضي الذين سيجرون العملية بنجاح

الحل : لدينا المتغير العشوائي (x) هو نجاح العملية للمرض ، وكل عملية لديها احتمال نجاح و احتمال فشل و كل مرض يمكن اعتباره تجرة مستقلة عن البقية وبالتالي التوزع يتبع التوزيع الثنائي

لدينا $x \sim b(10\,,0.9)$, $n=10$, $q= 0.1$,

$p=0.9$

ومنه دالة الاحتمال

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} C_1^x \quad (0.9)^x \quad (0.1)^{1\ -x} & x = 0\,,1,2,3, \dots .10 \\ 0 & \text{ماعد ذاك} \end{cases}$$

- احتمال نجاح العملية ل 7 من المرضي :

$$f(7) = P(x = 7) = C_1^7 \quad (0.9)^7 \quad (0.1)^{1\ -7} \ =$$

- احتمال نجاح العملية لجميع المرضي

$$f(10) = P(x = 10) = C_1^1 \quad (0.9)^1 \quad (0.1)^{1\ -1} \ =$$

- احتمال نجاح العملية ل 8 من المرضي

$$f(8) = P(x = 8) = C_1^8 \quad (0.9)^8 \quad (0.1)^{1\ -8} \quad =$$

- احتمال نجاح العملية ل 8 من المرضي علي الأقل

$$f(8) + f(9) + f(10) = P(x = 8) + p(x = 9) + p(x = 10)$$

$$= C_1^8 \quad (0.9)^8 \quad (0.1)^{1\ -8} + C_1^9 \quad (0.9)^9 \quad (0.1)^{1\ -9}$$
$$+ C_1^1 \quad (0.9)^1 \quad (0.1)^{1\ -1} \quad =$$

- توقع عدد المرضي الذين سيجرون العملية بنجاح

$$\mathbf{E(X) = np = 10 \ . \ 0.9 = 9}$$

- تباين المرضي الذين سيجرون العملية بنجاح

$$\mathbf{V(X) = npq = 10 \ .(0.9).(0.1) = 0.9}$$

التمرين الثاني : لدينا عينة من 100 شخص ، كل منهم يمكن له أن يكون مصاب بداء السكري باحتمال 0.3 ، المطلوب : ما هو القانون الاحتمالي لهذه العينة

- احسب احتمال أن يكون 40 شخص مصاب بهذا الداء
- احسب التوقع و التباين لهذا التوزع

الحل : لدينا متغير عشوائي يتمثل في احتمال إصابة الشخص بداء السكري و احتمال الإصابة ثابت لكل شخص وبالتالي فهو يتبع التوزع الثنائي

لدينا $x \sim b(100, 0.3)$, , n=100 , q= 0.7 p=0.3

ومنه دالة الاحتمال

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} C_1^x \quad (0.3)^x \quad (0.7)^{1\ -x} & x = 0,1,2,3,\ldots..100 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- حساب احتمال أن يكون 40 شخص مصاب بهذا الداء

$$f(40) = P(x = 40) = C_1^4 \quad (0.3)^4 \quad (0.7)^{1\ -4} \quad =$$

- التوقع و التباين لهذا التوزع

$$E(X) = np = 100 \ . \ 0.3 = 30$$

$$V(X) = npq = 100 . (0.3) . (0.7) = 21$$

التمرين الثالث: إذا كان من بين كل 100 وحدة منتجة هناك واحدة فقط معيبة ، ما هو احتمال أن في إنتاج 200 وحدة قادمة

- أن لا يكون في الإنتاج معيب ؟
- أن يكون هناك منتج واحد فقط معيب ؟
- أن يكون هناك منتج واحد علي الأقل معيب ؟
- احسب متوسط (التوقع) عدد الوحدات المعيبة و تباينها ؟

الحل : لدينا $p = \frac{1}{1} = 0.01$, n=200

ومنه $\lambda = n \, . \, p = 200 \, . \, (0.01) = 2$

لدينا التوزع يتبع توزع بواسون $x \sim P(2)$

$$f(x) = P(x = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{2^x e^{-2}}{x!} \quad , (x = 0, 1, 2, \dots)$$

- حساب أن لا يكون في الإنتاج معيب

$$f(0) = P(x = 0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0.13533$$

- حساب أن يكون هناك منتج واحد فقط معيب

$$f(1) = P(x = 1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0.13533$$

- حساب أن يكون هناك منتج واحد علي الأقل معيب

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x < 1) = 1 - p(x = 0)$$

$$= 1 - 0.13533 = 0.86466$$

- حساب متوسط (التوقع) عدد الوحدات المعيبة و تباينها

- التوقع الرياضي $E(x)$: $\quad E(X) = \lambda = 2$
- التباين $V(X)$: $\quad V(X) = \lambda = 2$

التمرين الرابع : ليكن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزع بواسون **حيث** $x \sim P(3)$

المطلوب :

- كتابة دالة التوزع ل (X) ؟
- حساب قيم الاحتمالات للقيم التالية $p(x = 2)$, $p(x > 1)$, $p(x < 2)$
- حساب التوقع الرياضي و التباين والانحراف المعياري

الحل : دالة التوزع ل (X)

$$f(x) = P(x = xi) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^{x} e^{-3}}{x!} \quad , (x = 0, 1, 2, \dots \infty)$$

حساب قيم الاحتمالات للقيم التالية $p(x = 2)$, $p(x > 1)$, $p(x < 2)$

$$p(x = 2) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = \frac{2}{6} e^{-3} =$$

$$p(x > 1) = 1 - p(x \leq 1) = 1 - [p(x = 0) + p(x = 1)] =$$

$$1 - \left[\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!}\right] = 1 - [e^{-3} + 3e^{-3}] =$$

$$p(x < 2) = [p(x = 0) + p(x = 1)] = \left[\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!}\right]$$

$$= [e^{-3} + 3e^{-3}] =$$

- حساب التوقع الرياضي و التباين والانحراف المعياري

- التوقع الرياضي $E(x)$: $\quad E(X) = \lambda = 3$
- التباين $V(X)$: $\quad V(X) = \lambda = 3$
- الانحراف المعياري : $\quad \delta_{(x)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} =$

التمرين الخامس : مصنع إنتاجي يحوي علي عدد من الخطوط الإنتاجية،كان احتمال توقف احد هذه الخطوط عن العمل لمدة يوم واحد هو 0.1 ، المطلوب :

- كتابة دالة الاحتمال لذا التوزع ؟
- ما هو احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل لمدة 3 أيام ؟
- ما هو احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل لمدة 3 أيام علي الأكثر ؟
- اوجد التوقع الرياضي و التباين لهذا التوزع ؟

الحل : هذا التوزع يتبع التوزع الهندسي لأنه يحقق شروطه $x \sim G(0.1)$

حيث $P = 0.1$, $q = 1 - p = 0.9$

دالة الاحتمال لهذا التوزع

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} 0.1 \ (0.9)^{x-1} & x = 1,2,3,\ldots\ldots\infty \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل لمدة 3 أيام

$$f(3) = P(x = 3) = 0.1 \ (0.9)^{3-1} = 0.081$$

احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل لمدة 3 أيام علي الأكثر

$$P(x \leq 3) = p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3)$$

$$= 0.1 \ (0.9)^{1-1} + 0.1 \ (0.9)^{2-1} + 0.1 \ (0.9)^{3-1} = 0.1 + 0.09 + 0.081$$
$$= 0.271$$

التوقع الرياضي و التباين لهذا التوزع

- **التوقع الرياضي E(x)** : $\mathbf{E(X) = = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 1}$
- **التباين V(X)** : $\mathbf{V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0.9}{(0.1)^2} = 9}$

التمرين السادس : لدينا كيس يحتوي على 5 حبات تفاح و 7 حبات برتقال ، تم اختيار 6 حبات فاكهة من هذا الكيس عشوائيا و بدون ارجاع

المطلوب : كتابة دالة التوزع للمتغير العشوائي الذي يمثل حبات التفاح المسحوبة ؟

- ما هو احتمال ان يكون من الحبات المختارة 3 حبات تفاح ؟
- اوجد الوسط الحسابي و التباين لهذا التوزع ؟

الحل : : لدينا حالة توزع فوق الهندسي حيث

N= 12 , N1= 5 , N- N1 = 7 , n= 6

- دالة التوزع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي الذي يمثل عدد حبات التفاح

$$f(x) = P(x = x) = \begin{cases} \dfrac{(C_5^x)\ (C_7^{6-x})}{C_1^6} & x = 0,1,2,3,4,5,6 \\ 0 & \text{ماعد ذلك} \end{cases}$$

احتمال أن يكون من الحبات المختارة 3 حبات تفاح

$$f(3) = P(x = 3) = \frac{(C_5^3)\ (C_7^{6-3})}{C_1^6} = \frac{1\ (3\ )}{9} = 0.3787$$

- التوقع و التباين لهذا التوزع

– **التوقع الرياضي E(x) :** $\mathbf{E(X) = n \square \frac{N_1}{N} = 6 \square \frac{5}{1} = \frac{3}{1}}$

– **التباين V(X) :** $\mathbf{V(X) = n \square \frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$

$$= 6 \square \frac{5}{1}\left(1 - \frac{5}{1}\right)\left(\frac{1\ \ -6}{1\ \ -1}\right) = \left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{7}{1}\right)\left(\frac{6}{1}\right) = \frac{1}{1}$$

$$= 0.7$$

التمرين السابع : عرضت البلدية قطعة أرضية للبيع عن طرق المزاد العلني و لا تقبل البيع إلا من يقدم مبلغ أكثر من 100مليون دج ، إن فرضنا العروض المقدمة لشراء القطعة الأرضية هي متغير عشوائي موزع بانتظام بين 100مليون دج و 150 مليون دج

المطلوب :

- اكتب دالة الكثافة الاحتمالية و دالة التوزيع التجميعية لهذا التوزع

- اذا قدم شخصا ما مبلغ 120 مليون دج فما هو احتمال ان يحصل على هذه القطعة
- وإذا قدم شخصا أخر ما مبلغ 140 مليون دج فما هو احتمال ان يحصل على هذه القطعة
- ما هو العرض المقدم الذي يعظم احتمال الحصول على القطعة
- احسب التوقع و التباين لهذا التوزيع

الحل : لدينا المتغير العشوائي (x) يتبع التوزيع المنتظم حيث

$$x \sim \mu(1 \quad ,1 \quad) \qquad \alpha = 1 \text{ و } \beta = 1$$

- كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{150 - 100} & 100 \leq x \leq 150 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- كتابة دالة التوزيع التجميعية له

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < \alpha \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & , \quad x \in [\alpha \ , \ \beta] \\ 1 & , \quad x \geq \beta \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 100 \\ \dfrac{x - 100}{150 - 100} & , \quad x \in [100 \ , \ 150] \\ 1 & , \quad x \geq 150 \end{cases}$$

- حساب احتمال إذا قدم شخصا ما مبلغ 120 مليون دج حصوله على هذه القطعة

$$p(100 \le x \le 120) = F(120) - F(100) = \int_{1}^{1} \frac{1}{150 - 100}\, d$$

$$= [0.02]_{1}^{1} \quad = \quad 0.4 = 40\%$$

- حساب احتمال اذا قدم شخصا ما مبلغ 140 مليون دج حصوله على هذه القطعة

$$p(100 \le x \le 140) = F(140) - F(100) = \int_{1}^{1} \frac{1}{150 - 100}\, d$$

$$= [0.02]_{1}^{1} \quad = \quad 0.8 = 80\%$$

- العرض المقدم الذي يعظم احتمال الحصول على القطعة هو

بما أننا نعلم أن اكبر احتمال يساوي الواحد و منه فان المبلغ المقدم الذي هو y هو الذي يعظم احتمال الحصول على هذه القطعة الأرضية

$$p(100 \le x \le y) = F(140) - F(y) = \int_{1}^{y} \frac{1}{150 - 100}\, d \quad = 1$$

$$= [0.02\, x]_{1}^{y} \quad = 1 \square\ 0.02y - 2 = 1 \square\ y = \frac{3}{0.02} = 150$$

أي أن مقدم العرض حتى يكون متأكدا من حصوله على القطعة الأرضية فما عليه إلا أن يقدم مبلغ 150مليون دج فما فوق

- حساب التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعياري

- **التوقع الرياضي E(x) :**

$$E(x) = \frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{150 + 100}{2} = 125$$

- **التباين V(x) :**

$$V(x) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12} = \frac{(150 - 100)^2}{12} = 208.333$$

- الانحراف المعيار :

$$\delta_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{(1 \quad -1 \quad)^2}{1}} = \sqrt{2 \quad .3} = 1.0$$

التمرين الثامن : ليكن الوقت الذي يستغرقه جهاز كربائي معين حتى يتوقف عن العمل متغيرا عشوائي يتبع التوزع الآسي بمعدل سنتين فاوجد :

- دالة الكثافة الاحتمالية
- احتمال مرور ثلاث سنوات على الأقل قبل أن يتوقف الجهاز عن العمل
- احتمال أن لا يمضي أكثر من سنتين حتى يتوقف الجهاز عن العمل
- توقع و تباين الوقت الذي يستغرقه الجهاز حتى يتوقف عن العمل

الحل : لدينا $(2) \quad x \backsim E$

- دالة الكثافة الاحتملية لهذا التوزع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{-x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}$$

- حساب احتمال مرور ثلاث سنوات على الأقل قبل أن يتوقف الجهاز عن العمل

$$p(x \geq 3) = 1 - p(x < 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(1 - e^{\frac{-3}{2}}\right)$$

$$= e^{\frac{-3}{2}} = e^{-1.5}$$

- حساب احتمال أن لا يمضي أكثر من سنتين حتى يتوقف الجهاز عن العمل

$$p(x \leq 2) = F(2) = \left(1 - e^{\frac{-2}{2}}\right) = 1 - e^{-1} = 1 - e^{-0.5} =$$

- حساب المتوسط و التباين لمرور حافلتين
- التوقع الرياضي $E(x)$: $E(X) = \beta = 2$
- التباين $V(X)$: $V(X) = \beta^2 = 4$

التمرين التاسع :ليكن المتغير العشوائي (z) يتوزع وفق التوزع الطبيعي المعيارب

$z \sim N(0\ ,\ 1)$ ن المطلوب : اوجد الاحتمالات التالية

$$p(z < 2.58)\ ,\ p(z \geq 1.9\ )\ ,\ p(0.6\ \leq z \leq 3)\ ,\ p(z \geq -0.8\ )$$

الحل :

- $p(z < 2.58) = F(2.5\ ) = 0.9$
- $p(z \geq 1.9\ ) = 1 - p(z < 1.96) = 1 - F(1.9\ ) = 1 - 0.9 \quad = 0.0$
- $p(0.6\ \leq z \leq 3) = p(z \leq 3) - p(z \leq 0.6\ = F(3) - F(0.6\ )$

$$= 0.9 \quad - 0.7 \quad = 0.2$$

- $p(z \geq -0.8\ ) = 1 - p(z \leq -0.8\ ) = 1 - (1 - p(z \leq 0.8\ ))$

$$= p(z \leq 0.8\ ) = F(0.8\ ) = 0.8$$

التمرين العشر :لاحظ أستاذ مادة الإحصاء أن متوسط الوقت الكافي الذي يحتاجه الطلاب لإكمال امتحانهم النهائي هو 150 دقيقه بانحراف معيار قدره 30 دقيقه.

المطلوب :

1. ما احتمال أن يكمل الطلاب امتحانهم بين 125و 150 دقيقه.
2. ما احتمال أن يكمل الطلاب اختبارهم فى 185 دقيقه أو أقل
3. ما احتمال أن يكمل الطلاب اختبارهم فى وقت يزيد على 195 دقيقه
4. إذا كان عدد الطلاب 1000 طالب . أوجد عدد الطلاب الذين أكملوا امتحانهم في وقت يزيد على 185 دقيقة ؟

الحل : لدينا $x \sim N(1\ \ ,\ 3\ )$

1. احتمال أن يكمل الطلاب امتحانهم بين 125و 150 دقيقه

$$P(125 \le X \le 150) = P\left(\frac{125-150}{30} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{150-150}{30}\right)$$
$$= P(-0.83 \le Z \le 0) = P(Z \le 0) - P(Z \le -0.83)$$
$$= 0.5000 - 0.2033 = 0.2967$$

وعليه نقرر أن احتمال إكمال الطلاب لامتحانهم فى فتره زمنيه تتراوح بين 125 و 150 دقيقه =29.7 % .

2. احتمال أن يكمل الطلاب اختيارهم في 185 دقيقه أو أقل

$$P(X \le 185) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{185-150}{30}\right) = P(Z \le 1.17) = 0.8790$$

وعليه نقرر أن احتمال إكمال الطلاب لامتحانهم في فتره زمنيه 185 دقيقه أو أقل = 87.9 %

3. ما احتمال أن يكمل الطلاب اختيارهم فى وقت يزيد على 195 دقيقه .

$$P(X \ge 195) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \ge \frac{195-150}{30}\right)$$
$$= P(Z \ge 1.5) = 1 - P(Z \le 1.5) = 1 - 0.9332 = .0668$$

أي أن احتمال أن يكمل الطلاب اختيارهم في وقت يزيد على 195 دقيقه =6.7 %تقريبا.

4. عدد الطلاب الذين أكملوا امتحانهم في وقت يزيد على 195 دقيقة :

1000* $P(X \ge 195)$ =1000 * 0.0668=66.8= 66

أي 66 طالب

التمرين الحادي عشر : إذا كانت علامات طلاب السنة الأولي و عددهم 1000 طالب في مادة الرياضيات تتبع التوزع الطبيعي بوسط حسابي قدره 12 و انحراف معياري قدره 4 ، اخترنا من هؤلاء الطلبة طالبا بصفة عشوائية ، فاوجد

- احتمال أن تكون علامته أكثر من 19
- احتمال أن تكون علامته بين 10و 12.5
- احتمال أن لا تزيد علامته عن 12

- ما هي نسبة الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن 10و ما عددهم
- إذا علمت أن الجامعة سوف تكرم 10% من الطلبة الأوائل فما هو ادني معدل سوف يتم تكريمه من الطلبة الأوائل

الحل : لدينا $x \sim N(1 \quad , \quad 4)$ حيث **x** متغير عشوائي يمثل علامات الطلبة في الامتحان

- حساب احتمال أن تكون علامته أكثر من 19

$$p(x \geq 19) = p\left(z \geq \frac{19-12}{4}\right) = p(z \geq 1.75) = 1 - p(z \leq 1.75)$$

$$= 1 - 0.9599 = 0.0401$$

- حساب احتمال أن تكون علامته بين 10و 12.5

$$p(10 \leq x \leq 12.5) = p\left(\frac{10-12}{4} \leq z \leq \frac{12.5-12}{4}\right) =$$

$$p(-0.5 \leq z \leq 0.125 = p(z \leq 0.125) - p(z \leq 0.5)$$
$$= F(0.125) - \big(1 - p(z \leq 0.5)\big) = F(0.125) - 1 + F(0.5)$$
$$= 0.5478 - 1 + 0.6915 = 0.2393$$

- نسبة الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن 10و ما عددهم

$$p(x \geq 10) = p\left(z \geq \frac{10-12}{4}\right) = p(z \geq -0.5) = 1 - p(z \leq 0.5)$$

$$= 1 - 0.6915 = 0.3085$$

أما عددهم هو طالب $1000 * \ 0.3085 = 308$

- ادني معدل للطلبة الأوائل الذين سوف يتم تكريمهم هو

ليكن a هو ادني معدل لتكريم الطلبة الأوائل حيث $p\left(z \geq \frac{a-\mu}{\delta}\right) = 0.10$

$$p\left(z \geq \frac{a-12}{4}\right) = 0.10 = 1 - p\left(z \leq \frac{a-12}{4}\right) = 0.10$$

$$\Rightarrow p\left(z \leq \frac{a-12}{4}\right) = 1 - 0.10 = 0.9000$$

نبحث في جدول التوزع الطبيعي المعيارب عن المساحة (0.9000) و القيمة التي تقابلها فلا نجد تلك المساحة و بالتالي نأخذ اقرب مساحة لتك المساحة وهي 0.8997 و القيمة التي تقابلها هي 1.28 ومنه

$$\frac{a-12}{4} = 1.28 \Rightarrow a - 12 = 5.12 \Rightarrow a = 17.12$$

ملاحظة : في بعض الحالات في الحالة العكسية لاستعمال جدول التوزع الطبيعي المعيارب اما نجد القيمة المقابلة $\left(\frac{a-\mu}{\delta}\right)$ مباشرة للمساحة المطلوبة أو إما نجد اقرب قيمة لها كما في التمرين السابق ، وإما نجد مساحتين متقاربتين بنفس البعد وهنا نأخذ الوسط للقيمتين مثل المساحة 0.8859 فعندما نبحث في الجدول نجد مساحتين قريبتين لها هما 0.8849 و 0.8869 و بالتالي نأخذ الوسط للقيمتين وهما 1.20 و 1.21 وتصبح القيمة المطلوبة هي

$$\frac{1.21 + 1.20}{2} = 1.205$$

التمرين الثاني عشر :

1- آو جد قيمة χ_0^2 الجدولية الموافقة لاحتمال القيم التالية

$$p(\chi^2 \le \chi_0^2 \quad) = 0.9 \quad , p(\chi^2 \le \chi_0^2 \quad) = 0.9 \quad , p(\chi^2 \le \chi_0^2 \quad) = 0.9$$

$$p(\chi^2 \ge \chi_0^2 \quad) = 0.2 \quad , \quad p(\chi^2 \ge \chi_0^2 \quad) = 0.0\ \ 5$$

من اجل درجة حرية **v=5**

2- آو جد قيمة χ_0^2 الجدولية الموافقة لاحتمال القيمة التالية $p(\chi^2 \le \chi_0^2 \quad) = 0.9$ من اجل درجة حرية **v=60**

الحل : من اجل درجة حرية **v=5**

- $p(\chi^2 \le \chi_0^2 \quad) = 0.9$ □ $\chi_0^2 = \chi^2_{(v,p)}$ □ $\chi^2_{(5,0.9\ )} \quad = 1\ \ .0$

  □ $p(\chi^2 \le \chi^2_{(5,0.9\ )} \quad) = 0.9$ □ $p(\chi^2 \le 1\ \ .0\ ) = 0.9$

- $p(\chi^2 \leq \chi_0^2 \ ) = 0.9 \ \square \ \chi_0^2 = \chi_{(v,p)}^2 \ \square \ \chi_{(5,0.9\ )}^2 \ = 9.2$

  $\square \ p(\chi^2 \leq \chi_{(5,0.9\ )}^2 \ ) = 0.9 \ \square \ p(\chi^2 \leq 9.2 \ ) = 0.9$

- $p(\chi^2 \leq \chi_0^2 \ ) = 0.9 \ \square \ \chi_0^2 = \chi_{(v,p)}^2 \ \square \ \chi_{(5,0.9\ )}^2 \ = 1\ .0$

  $\square \ p(\chi^2 \leq \chi_{(5,0.9\ )}^2 \ ) = 0.9 \ \square \ p(\chi^2 \leq 1\ .0 \ ) = 0.9$

- $(\chi^2 \geq \chi_0^2 \ ) = 0.2 \ \square \ \alpha = 0.2 \ \square \ p = 1 - \alpha = 0.7 \ \square$

  $p(\chi^2 \leq \chi_0^2 \ ) = 0.7 \ \square \ \chi_0^2 = \chi_{(v,p)}^2 \ \square \ \chi_{(5,0.7\ )}^2 \ = 6.6$

  $\square \ p(\chi^2 \leq \chi_{(5,0.7\ )}^2 \ ) = 0.7 \ \square \ p(\chi^2 \leq 6.6 \ ) = 0.7$

- $(\chi^2 \geq \chi_0^2 \ ) = 0.0\ 5 \ \square \ \alpha = 0.0 \ \square \ p = 1 - \alpha = 0.9 \ \square$

  $p(\chi^2 \leq \chi_0^2 \ ) = 0.9 \ \square \ \chi_0^2 = \chi_{(v,p)}^2 \ \square \ \chi_{(5,0.9\ \ )}^2 \ = 1\ .8$

  $\square \ p(\chi^2 \leq \chi_{(5,0.9\ \ )}^2 \ ) = 1\ .8 \ \square \ p(\chi^2 \leq 1\ .8 \ ) = 0.9$

3- إيجاد قيمة χ_0^2 الجدولية الموافقة لاحتمال القيمة التالية $p(\chi^2 \leq \chi_0^2 \ ) =$ 0.9 من اجل درجة حرية **v=60**

من اجل درجة حرية v=60 قيمة درجة الحرية لا توجد في الجدول ومنه نقربها الى التوزيع الطبيعي لان

$\mathbf{v} \geq 3$ ، ، ويعتبر تقرب جيد $\left(\sqrt{2\chi^2} \ - \sqrt{2 \ \ - 1}\right) \backsim N(0\ ,1)$

لدينا $p(\ Z \leq Z_0\ ) = 0.90$ فنجد القيمة المعيارية هي $p(\ Z \leq 1.28\ ) = 0.90$

ومنه $Z_0 = 1.28$ ، نبحث عن قيمة χ_0^2 من خلال المتغيرة المعيارية

$$p\left(\sqrt{2\chi^2} \ - \sqrt{2 \ \ - 1} \ \leq 1.2 \ \right) = 0.9 \ \square$$

$$p\left(\sqrt{2\chi^2} \ \leq \sqrt{2 \ \ - 1} + 1.2 \ \right) = 0.9 \ \square$$

$$p\left(2\chi^2 \ \leq \left(1.2 \ + \sqrt{2 \ \ - 1}\right)^2\right) = 0.9 \ \square$$

$$p\left(\chi^2 \le \frac{\left(1.2 + \sqrt{2 - 1}\right)^2}{2}\right) = 0.9 \quad \square$$

$$p\left(\chi^2 \le \frac{\left(1.2 + \sqrt{1}\right)^2}{2}\right) = 0.9 \quad \square$$

$$p(\chi^2 \le 7.2) = 0.9 \quad \square\ \chi^2_{(v,p)} = \chi^2_{(6,0.9)} = 7.2$$

تمارين مقترحة

التمرين الأول : ألقيت ستة زهرات . نفرض أننا نراقب ظهور الوجه الذي يحمل الر قم (3) . اوجد دالة كثافة الاحتمال الخاصة بالمتغير (X) وهو يمثل ظهور الرقم (3) .

التمرين الثاني : إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة في إنتاج نوع من المصابيح الكهربائية هى 02 وان عدد الوحدات المعيبة يتبع توزع بواسون. نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من عشرة مصابيح المطلوب

1. إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير .
2. احتمال الحصول على مصباح واحد معيب .
3. احتمال الحصول على مصباح معيب على الأكثر.

التمرين الثالث : إن نسبة الإنتاج التالف لأحد مصانع المصابيح هي 10% . إذا أخذت عينة مكونة من 5 مصابيح بشكل عشوائي من إنتاج هذا المصنع، فأوجد ما يلي:

1- .أوجد الاحتمالات التالية:
- .الحصول على مصباح واحد تالف
- الحصول على جميع المصابيح تالفة
- الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر
- الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل

2– أوجد العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة

التمرين الرابع: قامت إدارة المرور بالعاصمة بوضع جهازا للرادار عند احد مداخل العاصمة لضبط السيارات المسرعة في فترة معينة من اليوم، نفترض أن X تمثل السرعة في الساعة للسيارات التي تمر عند المدخل في فترة عمل الرادار، إذا كانت X تتوزع توزيعا طبيعي وسطه الحسابي 60 كلم وتباينه 25 كلم، أوجد التالي:

- نسبة السيارات التي تقل سرعتها عن 50 كلم في الساعة .
- نسبة السيارات التي تزد سرعتها عن 65 كلم في الساعة.

- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 60 كلم و 77.45 كلم في الساعة .

عدد السيارات التي تكون سرعتها بين 60كلم و 77.45 كلم من بين 10000 سيارة

التمرين الخامس : إذا كانت نسبة النجاح في أحد المقررات هى 80 % فإذا تقدم لهذا الامتحان 15 طالب ما هو احتمال أن ينجح:

- جميع الطلاب
- 8 طلاب
- 6طلاب
- - ولا طالب

التمرين السادس : إذا كانت نسبة الإصابة بمرض الإنفلوانزا فى إحدى المدن في فصل الشتاء هي . 60% تم اختيار 20 شخص من هذه المدينة، ما احتمال أن يكون:

- 7 أشخاص مصابون بالإنفلوانزا
- جميعهم أصحاء.
- جميعهم مرضى.
- ما احتمال أن يكون نصفهم مرضى.

التمرين السابع : إذا كان متوسط عدد طالبي استخدام ماكينة السحب الآلي فى أحد البنوك هو 5 أفراد كل نصف ساعة.

أ -احسب الاحتمالات التالية لإعداد الواصلين كل نصف ساعة بأن يكون:

- 10 أشخاص
- يقل عن3 أشخاص.
- أكثر من شخص واحد.
- يتراوح العدد بين 4 و8 أشخاص.

ب-احسب نفس الاحتمالات السابقة إذا كان معدل الوصول كل ربع ساعة.

ج -احسب نفس الاحتمالات السابقة إذا كان معدل الوصول كل ساعة.

التمرين الثامن : معرض سيارات به 48 سيارة من بينها 8 سيارات معيبة .اختيرت عينة عشوائية من 5 سيارات اوجد:

أ -احتمال أن تكون العينة المسحوبة كلها سليمة

ب -احتمال أن تكون سيارة واحدة معيبة

ج -احتمال وجود سيارتين معيبتين على الأقل بالعينة

التمرين التاسع: كيس يحتوي على 8 حبات برتقال و 10 حبات موز اختيرت من هذا الكيس 8 حبات دون إرجاع المطلوب : حساب احتمال أن يكون من بين الحبات المختارة 4 حبات برتقال

اوجد الوسط الحسابي و التباين لهذه التجربة العشوائية

التمرين العاشر: يصوب شخص نحو هدف معين ، و يستمر في التصويب حتى يصيب الهدف للمرة الأولي ، فإذا كان احتمال إصابة الهدف في كل مرة هو 0.7

المطلوب :

- حساب احتمال أن يحتاج إلى 3 محاولات لإصابة الهدف
- حساب احتمال أن يحتاج إلى 5 محاولات على الأقل لإصابة الهدف
- حساب احتمال الهدف قبل المحاولة العاشرة

التمرين الحادي عشر : صندوق يحتوي على 10 كرات منها 4 كرات حمراء و 6 كرات زرقاء ، سحبنا 5 كرات من الصندوق بدون إرجاع

المطلوب :

- حساب احتمال سحب كرتين حمراوتين من الصندوق
- حساب احتمال سحب كرة واحدة حمراء على الأكثر
- حساب احتمال أن تكون على الأقل احد الكرات المسحوبة حمراء
- حساب توقع و تباين عدد الكرات الحمراء المسحوبة

التمرين الثاني عشر: ليكن X موزعا توزيعا منتظم في المجال (5 ، 2) فاوجد :

- التوقع الرياضي و التباين لهذا التوزع
- اوجد القيمة $P\left(|x-\mu|>\frac{2}{\sqrt{3\delta}}\right)$

التمرين الرابع عشر : شحنة من 80 جهاز كهربائي من بينها 4 أجهزة معيبة، تم سحب عينة عشوائية من 3 أجهزة.اوجد احتمال أن تحتوي هذه العينة على جهاز واحد متعطل

التمرين الخامس عشر:من الإحصائيات نعلم أن متوسط وزن منتج معين هو 3 كغ بانحراف معيار 0.5 كغ.

-أحسب الحد الأدنى لنسبة المنتجات التي يتراوح وزنها بين 1.5 كغ و 4.5 كغ.

يفرض أن وزن المنتج يتبع التوزيع الطبيعي بالمتوسط و الانحراف المعيار المذكورين أعلاه، و أن المنتج يعتبر سليما إذا كان وزنه يتراوح بين 1.5 و 4.5 كغ،

-أحسب نسبة المنتجات التي يزيد وزنها عن 3 كغ.

-أحسب نسبة المنتجات التي يتراوح وزنها بين 1.5 و 4.5 كغ.

-توجه 5 بالمئة من المنتجات الأكبر وزنا للإصلاح .ما هو الوزن الأدنى لهذه المنتجات ؟

التمرين السادس عشر : إذا كانت علامات 1000 طالب في مقياس الإحصاء تتبع التوزع الطبيعي بمتوسط حسابي قدره 11 و انحراف معيار قدره 3

فأوجد : - نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 10، ثم أوجد عددهم ؟

- نسبة الطلبة الذين تفوق علاماتهم عن 13، ثم أوجد عددهم ؟
- إذا علمت أن الجامعة قبلت 10% من هؤلاء الطلبة المتفوقين لمنحهم منحة لإتمام دراستهم بالخارج ، فما هو الحد الأدنى للعلامات التي على أساسها يحصل صاحبها على هذه المنحة ؟

التمرين الثامن عشر_ : إذا كان متوسط عدد طالبي استخدام آلة السحب الآلي في أحد المراكز البريدية هو 5 أفراد كل نصف ساعة ،احسب الاحتمالات التالية لإعدادالأشخاص المستخدمين لهذه الآلة كل نصف ساعة بأن يكون:

1- عشرة أشخاص ؟ 2- يقل عن 3 أشخاص ؟

التمرين التاسع عشر_ : إذا كان متوسط عدد الحوادث التي تقع على الطرق الرابط بين العاصمة و البليدة هو 3 حوادث يوميا .ما هو احتمال 1- وقوع 6 حوادث في يوم ما ؟

2- أن يقع اقل من 3 حوادث في يوما ما ؟

التمرين العشرون : أخذت عينة عشوائية حجمها 9 أطفال من حديثي الولادة في إحدى المستشفيات ، فإذا علمت أن وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزع طبيعي معدله 2.9 كلغ و انحراف معيار 0.6 كلغ اخترنا مولود بصفة عشوائية

فاوجد :1- احتمال أن وزن هذا المولود يزيد عن 3.1 كلغ

2- اوجد احتمال أن يكون وزن هذا المولود محصور بين 2.7 كلغ و 3.2 كلغ

التمرين الواحد و العشرون : إذا كانت مدة الانتظار التي يعبر عنها ب X التي يقضيها المواطن في البريد أمام شباك لسحب راتبه من الحساب متغيرا عشوائيا يخضع للتوزع الأسي بمتوسط 15 دقيقة، المطلوب: أوجد دالة الكثافة الاحتمالية ، التوقع الرياضي، التباين لهذا التوزيع ؟ ما هو احتمال أن يقضي المواطن مدة تقل عن عشر دقائق؟ ما هو احتمال أن تدوم مدة انتظار الزبون على الأقل 15 دقيقة علما أنه انتظر 10 دقائق على الأقل؟

التمرين الثاني و العشرون: لنفرض أن X متغير عشوائي مستمر خاضع لتوزع طبيعي$\{E(X) = 5 \quad , \quad V(X) = 9\}$ ، أحسب ما يلي: $P(X \leq 8)$ ، $P(X \geq 8)$ ، $P(-1 \leq X \leq 1)$ ، $P(X \in [-4,14])$ ؟

التمرين الثالث و العشرون : إذا كان مجموع النقاط للطالب من 1200 طالب يتوزع طبيعيا بوسط 60 وانحراف معياري 15. كم عدد الطلبة الذين وقع مجموع نقاطهم بين 65 و 75؟ ما هي أقل علامة تحصل عليها طالب من 15% الأوائل؟ إذا قررت الإدارة منح جوائز ل 5% الأوائل فما هو الحد الأدنى للعلامة حتى يتحصل صاحبها على جائزة؟

التمرين الرابع و العشرون : 1- ليكن $X \sim B(n,p)$ ، مع العلم أن $E(X) = 2$ و $V(X) = \frac{3}{4}$ ، أوجد كلا من n و p ؟

التمرين الخامس و العشرون: سجلت مصلحة الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات بين الساعة: 00 19^h و 00 20^h دخول 120 مريض لهذه المصلحة، فما احتمال أن يتم بين

21 19^h و 22 19^h دخول:

1 - ولا مريض؟ 2- مريض واحد؟ 3- مريضان؟ 4- على الأقل مريضان؟

التمرين السادس و العشرون: بافتراض أن 1% من القطع التي تنتجها آلة هي فاسدة، قمنا بسحب عينة عشوائية مكونة من 100 وحدة ، المطلوب: إيجاد التوزيع الاحتمالي للقطع التالفة؟

التمرين السابع و العشرون : إذا كان وصول الطلبة إلى المطعم الجامعي يتبع التوزع الآسي بمعدل طالبين في الدقيقة

المطلوب : أ – احسب الاحتمالات التالية

1) احسب احتمال وصول 4 طلبة في دقيقة ما
2) احسب احتمال وصول 4 طلبة في نصف دقيقة
3) احسب احتمال أن تكون المدة بين وصول طالبين دقيقة أو اقل

ب - يفرض أن مدة انتظار الطالب قبل الحصول على الخدمة تتبع التوزع الآسي بمعدل ربع ساعة ، احسب احتمال أن ينتظر طالب ما مدة اقل أو تساوي ربع ساعة

التمرين الثامن و العشرون : يصل المسافرون عشوائيا إلى موقف حافلة المدينة بمعدل 5 مسافرين كل 10 دقائق.

- .أحسب احتمال أن يكون عدد المسافرين الذين يصلون في فترة عشر دقائق هو2
- أحسب احتمال أن يكون العدد هو 2 في فترة نصف ساعة.
- أحسب احتمال مرور أقل من 10 دقائق بين وصول مسافر والمسافر الذي يليه.

التمرين التاسع و العشرون: يزعم منتج ولاعات كهربائية أن منتجه صالح بنسبة% 99 ، أي أن الولاعة تعطي الشرارة عند تشغيلها باحتمال0.99

نأخذ ولاعة عشوائيا من المعمل و نجربها مرارا.

- أحسب احتمال أن يحدث أول فشل في إعطاء الشرارة في المرة الرابعة.
- في 10 تجارب، أحسب احتمال أن يحدث الفشل في إعطاء الشرارة على الأقل مرة.
- في حالة إجراء 100 تجربة، بين هل يمكن استخدام توزيع بواسون لحساب نفس الاحتمال

قائمة المراجع

قائمة المراجع :

- احمد عامر عامر – الإحصاء 2 – دار الغرب للنشر و التوزع – دون سنة نشر – الجزائر
- البشير عبد الكرم – الإحصاء 2– دار الكتاب العربي –سنة النشر 2006 – الجزائر
- احمد الأشقر – مقدمة في الإحصاء مفاهيم وطرائق – مكتبة الثقافة للنشر و التوزع ط –1999 – عمان الأردن
- احمد علي الزغول – مقدمة في الاحتمالات و تطبيقاتها– دار الفرقان للنشر و التوزع – عمان الأردن – ط1999
- السعدي رجال – نظرية الاحتمالات – ديوان المطبوعات الجامعية -2008- الطبعة 3 – الجزائر –ج 1
- بوعظم كمال – الإحصاء الاستدلالي من الجانب النظري و التطبيقي – دار زهران للنشر – عمان الأردن
- ثائر فيصل شاهر – اختبار الفرضيات الإحصائية - - دار الحامد للنشر و التوزع – الطبعة الأولي 2013- الأردن
- جيلا لي جلاطو ، نظرية الاحتمالات و التوزيعات الاحتمالية - دار هومة للطبعة و النشر -2014- الجزائر
- حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش - الإحصاء الاستدلالي - دار صفاء للنشر و التوزع – الطبعة الثانية 2015- عمان الأردن
- حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش - أساليب الإحصاء التطبيقي - دار صفاء للنشر و التوزع – الطبعة الأولي 2009- عمان الأردن
- شفيق العتوم - طرق الإحصاء – دار المناهج للنشر و التوزع - الطبعة الأولي 2006 – الأردن
- دلال القاضى وآخرون – الإحصاء للإدارين و الاقتصاديين – دار الحامد للنشر و التوزع – 2003- الأردن
- كمال فليفل و فتحي حمدان – الإحصاء - دار المناهج للنشر و التوزع - الطبعة الأولي 2006 – الأردن

- سيمور ليشتز – الاحتمالات - سلسلة ملخصات شوم – الدار الدولية للاستثمارات الثقافية – الطبعة 4 – 2000- القاهرة مصر
- موري سبيغل - الإحصاء و الاحتمالات – ملخصات شوم – اكاديميا انترناشيونال – بيروت لبنان – 2001-
- محمد يوسف أشقر و عبد اللطيف يوسف الصديقي – أساسيات الإحصاء و الاحتمالات – دار الراتب الجامعية – الطبعة الأولي بيروت
- معتوق أمحمد – الإحصاء الرياضي و النماذج الإحصائية – ديوان المطبوعات الجامعية – 2007- الجزائر
- مساوي عبد النور و برهان يوسف – الإحصاء 2- دار العلوم للنشر و التوزيع -2010- الجزائر
- موراي شبيجل – الإحصاء –سلسلة شوم – ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان – الدار الدولية للاستثمارات الثقافية – الطبعة السابعة – 2004- مصر
- محمد صبحي ابو صالح و عدنان محمد عوض – مقدمة في الإحصاء – دار المسيرة للنشر و التوزيع – الطبعة التاسعة 2015- الأردن

مراجع باللغة الأجنبية :

- -Dennis D. Wackerly, William Mendenhall and Richard L. Scheaffer (2008),Mathematical Statistics with Applications, 7 th Edition, Thomson Books, USA
- Neil A. Weiss (2017), **Introductory Statistics**, Pearson Education Limited,Tenth edition, England.

مراجع أخرى :

- بو عبد الله صالح- **محاضرات الإحصاء الرياضي**- مطبوعة لطلبة كلية العلوم الاقتصادية، جامعة .المسيلة، السنة الجامعية 2008
- شرف الدين خليل ، الإحصاء الوصفي ،شبكة الأبحاث و الدراسات الاقتصادية ، على الرابط www.rr4ee .net،

الملاحق

THE POISSONDISTRIBUTION

Cumulative Distribution Function

The columns correspond to different values for the mean (λ)) of a Poisson variable. The entries in the body of the table represent the probabilities that such a random variable does not exceed the integer x at the left of the row. For example, a Poisson variable of mean 0.8 is 2 or less with probability 0.953.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150	0.135
1	0.699	0.663	0.627	0.592	0.558	0.525	0.493	0.463	0.434	0.406
2	0.900	0.879	0.857	0.833	0.809	0.783	0.757	0.731	0.704	0.677
3	0.974	0.966	0.957	0.946	0.934	0.921	0.907	0.891	0.875	0.857
4	0.995	0.992	0.989	0.986	0.981	0.976	0.970	0.964	0.956	0.947
5	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.990	0.987	0.983
6	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.997	0.995
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

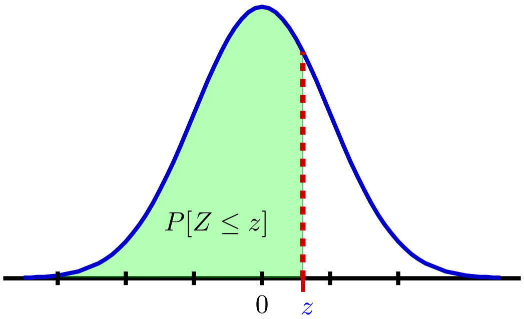
x	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0	0.111	0.091	0.074	0.061	0.050	0.041	0.033	0.027	0.022	0.018
1	0.355	0.308	0.267	0.231	0.199	0.171	0.147	0.126	0.107	0.092
2	0.623	0.570	0.518	0.469	0.423	0.380	0.340	0.303	0.269	0.238
3	0.819	0.779	0.736	0.692	0.647	0.603	0.558	0.515	0.473	0.433
4	0.928	0.904	0.877	0.848	0.815	0.781	0.744	0.706	0.668	0.629
5	0.975	0.964	0.951	0.935	0.916	0.895	0.871	0.844	0.816	0.785
6	0.993	0.988	0.983	0.976	0.966	0.955	0.942	0.927	0.909	0.889
7	0.998	0.997	0.995	0.992	0.988	0.983	0.977	0.969	0.960	0.949
8	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.994	0.992	0.988	0.984	0.979
9	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

x	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
0	0.015	0.012	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
1	0.078	0.066	0.056	0.048	0.040	0.034	0.029	0.024	0.021	0.017
2	0.210	0.185	0.163	0.143	0.125	0.109	0.095	0.082	0.072	0.062
3	0.395	0.359	0.326	0.294	0.265	0.238	0.213	0.191	0.170	0.151
4	0.590	0.551	0.513	0.476	0.440	0.406	0.373	0.342	0.313	0.285
5	0.753	0.720	0.686	0.651	0.616	0.581	0.546	0.512	0.478	0.446
6	0.867	0.844	0.818	0.791	0.762	0.732	0.702	0.670	0.638	0.606
7	0.936	0.921	0.905	0.887	0.867	0.845	0.822	0.797	0.771	0.744
8	0.972	0.964	0.955	0.944	0.932	0.918	0.903	0.886	0.867	0.847
9	0.989	0.985	0.980	0.975	0.968	0.960	0.951	0.941	0.929	0.916
10	0.996	0.994	0.992	0.990	0.986	0.982	0.977	0.972	0.965	0.957
11	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.990	0.988	0.984	0.980
12	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.991
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

x	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
0	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
3	0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010	0.007	0.005
4	0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029	0.021	0.015
5	0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067	0.050	0.038
6	0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130	0.102	0.079
7	0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220	0.179	0.143
8	0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333	0.279	0.232
9	0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458	0.397	0.341
10	0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583	0.521	0.460
11	0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697	0.639	0.579
12	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792	0.742	0.689
13	0.993	0.987	0.978	0.966	0.949	0.926	0.898	0.864	0.825	0.781
14	0.997	0.994	0.990	0.983	0.973	0.959	0.940	0.917	0.888	0.854
15	0.999	0.998	0.995	0.992	0.986	0.978	0.967	0.951	0.932	0.907
16	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.989	0.982	0.973	0.960	0.944
17	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995	0.991	0.986	0.978	0.968
18	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.993	0.988	0.982
19	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Table N

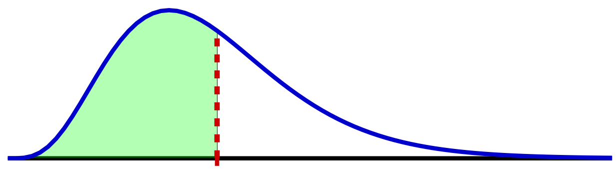
Aire sous la courbe normale à gauche de z, c'est à dire $P[Z \leq z]$, où $Z \sim N(0;1)$.



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09

Tableau C

Percentiles de la distribution du χ^2. Valeurs de χ^2_P correspondant à P



dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	.0201	.0506	.1026	.2107	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.0717	.1148	.2158	.3518	.5844	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2070	.2971	.4844	.7107	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.4117	.5543	.8312	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.6757	.8721	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.9893	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
45	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6
dl	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.1}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$

Table de la loi de Student

α	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500

Tableau F3

Percentiles de la distribution $F_{.975}(n_1, n_2)$

$n_2 \setminus n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.41	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Tableau F1

Percentiles de la distribution $F_{.90}(n_1, n_2)$

$n_2 \setminus n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Tableau F2

Percentiles de la distribution $F_{.95}(n_1, n_2)$

$n_2 \setminus n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00